第 8 卷 第 1 期 1958 年 3 月
數 學 學 報 ACTA MATHEMATICA SINICA
Vol. 8, No. 1 March, 1958

論數論函數 $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ 及 $d(n)$ 的一些性質

王 元

(中國科學院數學研究所)

§1. 前 言

命 $f(n)$ 爲一數論函數. 關於函數比值 $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的分佈問題, Somayajulu[1], Sierpiński[2] 及 Schinzel[3] 曾用算術的方法, 對於 $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ 及 $d(n)$ 加以處理. 華羅庚教授首先指出用 Brun 篩法處理這一類問題的途徑. 按這一方向, 作者與 Schinzel[4] 及邵品琮[5]得到了較前精密的結果, 例如:

命 $\varphi(n)$ 爲 Euler 函數. 任意給予 k 個非負實數 $a_1,\cdots,a_k$. 皆存在整數列 $\{n_j\}$ 使

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\varphi(n_j+\nu+1)}{\varphi(n_j+\nu)}=a_\nu\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).$$

本文的目的在於引入 Линник-Reńyi 方法來處理這一類問題. 從而將上述結果改進爲: 在同樣假定下, 存在素數列 $\{p_j\}$ 使

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\varphi(p_j+\nu+1)}{\varphi(p_j+\nu)}=a_\nu\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).$$

這一類結果主要依賴於下面

基本引理: 命 k 爲一正整數, 又命

$$m_0=(k+1)!^2q_{01}\cdots q_{0t_0},\quad m_i=q_{i1}\cdots q_{it_i}\quad(1\leqslant i\leqslant k)\tag{1}$$

爲兩兩互素的整數, 此處 $q_{\mu\nu}$ $(0\leqslant\mu\leqslant k,\ 1\leqslant\nu\leqslant t_\mu)$ 均爲大於 $k+1$ 的素數. 當 $x>>Z>(m_0m_1\cdots m_k)^2$ 時, 命 $N_Z(x)$ 表示方程組

$$\begin{cases}p+1=m_0x_0\\ p+\nu+1=\nu m_\nu x_\nu\quad(1\leqslant\nu\leqslant k)\end{cases}\tag{2}$$

適合下面條件

$$1<p\leqslant x,\ 若\ p'|x_\nu,\ 則\ p'>Z\quad(0\leqslant\nu\leqslant k)\tag{3}$$

的整數解 $(p,x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 數, 此處 p 與 p' 均表示素數*. 則存在僅與諸 m_i 有關的正常數 c_1 及 X_1 與僅與 k 有關的正常數 α 使

$$N_{x^\alpha}(x)>\frac{c_1x}{\log^{k+2}x\log\log x}\quad(x>X_1).$$

§2. 基本引理的證明

命 $M=(m_0m_1\cdots m_k)^2$, λ 爲區間 $1\leqslant\lambda\leqslant M$ 內的一整數滿足 $(\lambda,M)=1$. 命 $p_1<$

* 在此及以後, $p,p';p_1,p_2,\cdots;p'_1,p'_2,\cdots$ 均表示素數.

$<p_2<\cdots<p_r\leqslant Z$ 爲不超過 Z 而又不能整除 M 的素數．命 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant k+1)$ 爲適合下面條件的正整數：$1\leqslant a_{ij}<p_i$，當 $j_1\neq j_2$ 時，$a_{ij_1}\neq a_{ij_2}$．當 $x>Z>M$ 時，命 $M_Z(x)$ 爲滿足下面條件的素數 p 的個數

$$1<p\leqslant x,\ p\equiv\lambda\ (\mathrm{mod}\ M),\ p\not\equiv a_{ij}\ (\mathrm{mod}\ p_i)\quad(1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant k+1).\tag{4}$$

引 1．存在 λ 與諸 a_{ij} 使

$$N_Z(x)\geqslant M_Z(x).$$

證：由孫子定理可知聯立同餘式

$$y+\nu+1\equiv m_\nu(\mathrm{mod}\ m_\nu^2)\quad(0\leqslant\nu\leqslant k)\tag{5}$$

在區間 $1\leqslant y\leqslant M$ 內有唯一的解，記做 λ．

由於 $m_\nu\,|(\lambda+\nu+1)$ 及 m_ν 的定義可知 $(m_\nu,\lambda)=1$．因此

$$(\lambda,M)=1,\left(m_\nu,\frac{\lambda+\nu+1}{m_\nu}\right)=1\quad(0\leqslant\nu\leqslant k).\tag{6}$$

命

$$a_{ij}=p_i-j\quad(1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant k+1).\tag{7}$$

對此 λ 及諸 a_{ij}，取 p 適合(4)式，則由(5)式可知

$$\begin{cases}p+1=m_0x_0\\ p+\nu+1=m_0x_0+\nu=\nu m_\nu x_\nu\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).\end{cases}$$

由(6)式可知

$$(x_0,m_0)=\left(\frac{p+1}{m_0},\ m_0\right)=\left(\frac{\lambda+1}{m_0},\ m_0\right)=1,$$

$$(x_0,m_i)=(m_0x_0,\ m_i)=(p+1,\ m_i)=(p+i+1-i,\ m_i)=(-i,\ m_i)=$$
$$=1\quad(1\leqslant i\leqslant k),$$

$$(x_i,m_j)=(im_ix_i,\ m_j)=(p+i+1,\ m_j)=(p+j+1+i-j,\ m_j)=$$
$$=(i-j,\ m_j)=1\quad(i\neq0,i\neq j,j\neq0),$$

$$(x_i,m_i)=(ix_i,m_i)=\left(\frac{im_ix_i}{m_i},\ m_i\right)=\left(\frac{p+i+1}{m_i},\ m_i\right)=1\quad(i\neq0),$$

$$(ix_i,m_0)=(im_ix_i,\ m_0)=(p+i+1,\ m_0)=(i,\ m_0)=i\quad(i\neq0);$$

由於 $i^2\,|\,m_0$，故 $(x_i,m_0)=1\quad(i\neq0)$．

總之得到

$$(x_0x_1\cdots x_k,m_0m_1\cdots m_k)=1.\tag{8}$$

又由(7)可知

$$((p+1)(p+2)\cdots(p+k+1),\ p_1\cdots p_r)=1.\tag{9}$$

由(8)，(9)就證明了由此 p，即得出適合基本引理要求的一組解 $(p,x_0,x_1,\cdots,x_k)$．顯然不同的 p 所對應的解亦不同．明所欲證．

引 2．存在僅與 k 有關的正常數 β 及僅與 k，M 有關，而與 λ 及諸 a_{ij} 無關的正常數 c_2 及 X_2，使

$$M_{x^\beta}(x)>\frac{c_2x}{\log^{k+2}x\log\log x}\quad(x>X_2).$$

基本引理顯然是引 1 與引 2 的推論．關於引 2 的證明,當 $k=0$ 時,可參看 Reńyi[6]．其方法推廣至 $k>0$ 之情形,並無特殊困難．爲使證明完整起見,仍將證明大致步驟述於後．

§ 3. Brun 篩 法

本節及以後, M, λ 及諸 a_{ij} 均滿足上節所述條件．命

$$a_p=e^{-p\frac{\log x}{x}},$$

$$P(x,Q)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l \pmod Q}} a_p=\frac{x}{\varphi(Q)\log x}+R_Q(x),\quad (l,Q)=1,$$

$$\widetilde{M}_Z(x)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv\lambda\pmod M\\ p\not\equiv a_{ij}\pmod{p_i}\ (1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant k+1)}} a_p.$$

引 3. 命 $r=r_0\geqslant r_1\geqslant\cdots\geqslant r_n\geqslant 1$ 爲任意給予的整數列．則

$$\widetilde{M}_Z(x)\geqslant\frac{x\overline{E}}{\varphi(M)\log x}-\overline{R},$$

此處 $$\overline{E}=1-(k+1)\sum_{\alpha\leqslant r}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)}+(k+1)^2\sum_{\substack{\alpha\leqslant r\\ \alpha>\beta}}\sum_{\beta\leqslant r_1}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\varphi(p_\beta)}-+\cdots$$

$$-(k+1)^{2n+1}\overbrace{\sum_{\alpha\leqslant r}\sum_{\beta\leqslant r_1}\sum_{\gamma\leqslant r_1}\sum_{\delta\leqslant r_2}\cdots\sum_{\nu\leqslant r_n}}^{2n+1}_{\alpha>\beta>\gamma>\delta>\cdots>\nu}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\varphi(p_\beta)\cdots\varphi(p_\nu)},$$

$$\overline{R}=|R_M(x)|+(k+1)\sum_{\alpha\leqslant r}|R_{Mp_\alpha}(x)|+(k+1)^2\sum_{\substack{\alpha\leqslant r\\ \alpha>\beta}}\sum_{\beta\leqslant r_1}|R_{Mp_\alpha p_\beta}(x)|+\cdots$$

$$+(k+1)^{2n+1}\overbrace{\sum_{\alpha\leqslant r}\sum_{\beta\leqslant r_1}\sum_{\gamma\leqslant r_1}\sum_{\delta\leqslant r_2}\cdots\sum_{\nu\leqslant r_n}}^{2n+1}_{\alpha>\beta>\cdots>\nu}|R_{Mp_\alpha\cdots p_\nu}(x)|.$$

現在我們來估計 $\overline{E}$: 取 $h=(1.25)^{\frac{1}{k+1}}$, $h_0=\sqrt[4]{e}$．存在 $\delta_0\geqslant M$, 當 $\delta>\delta_0$ 時

$$\sum_{\delta<p\leqslant\delta^h}\frac{k+1}{\varphi(p)}<\log h_0=\tau,\quad \prod_{\delta<p\leqslant\delta^h}\left(1-\frac{k+1}{\varphi(p)}\right)^{-1}<h_0.$$

命 p_{r_j} $(0\leqslant j\leqslant t)$ 爲不超過 $Z^{\frac{1}{h^j}}$ 之最大素數, 此處 t 具有性質 $Z^{\frac{1}{h^t}}>\delta_0\geqslant Z^{\frac{1}{h^{t+1}}}$．取 $n=t+r_t$, $r_s=r_t$ $(t\leqslant s\leqslant n)$．則

$$\overline{E}>\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(h_0\tau^2n^2)^n}{(2n)!}\right)\prod_{\substack{p\leqslant Z\\ p\nmid M}}\left(1-\frac{k+1}{\varphi(p)}\right)>$$

$$>0.75\prod_{\substack{p\leqslant Z\\ p\nmid M}}\left(1-\frac{k+1}{\varphi(p)}\right)>\frac{c_3}{\log^{k+1}Z},$$

此處 c_3 爲僅與 k 及 M 有關的常數(參看王元[7])．

§4. 若干引理

吾人將模D之特徵,記做χ_D. 若$D = p_1^{a_1}\cdots p_l^{a_l}$爲$D$的標準分解式,習知$\chi_D = \chi_{p_1^{a_1}}\cdots\chi_{p_l^{a_l}}$. 若$\chi_{p_i^{a_i}}$是原特徵,則曰$\chi_D$對於$p_i^{a_i}$是本原的. 若$\chi_D$對所有$p_i^{a_i}$ $(1\leqslant i\leqslant l)$都是本原的則$\chi_D$就是通常所謂的原特徵.

引 A. 命q,A爲兩整數,A大於一個絕對常數c_4; p爲滿足$A\leqslant p<2A$及$(p,q)=1$的素數. 若

$$e^{(\log x)^{2/5}}\leqslant Aq\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2},\ k_1=\frac{\log q}{\log\frac{p}{2}}+1\geqslant\frac{\log q}{\log A}+1=\tilde{k},$$

且$k_1<\log^3 A$, 則在區間$A\leqslant p<2A$中,最多除掉$A^{3/4}$個素數,對於模pq且對p爲本原的特徵$\chi(n)$,均有

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\chi(p)\log p\cdot e^{-\frac{p\log x}{x}}\right|\leqslant c_5x^{1-\frac{\delta_2}{k_1+1}}\log x,$$

此處c_5爲絕對常數, $\delta_2=(4\cdot 10^4\cdot k_3)^{-1}$,而$k_3$見Линник[8].

證明參看Линник[8], Reńyi[6]. 及 Littlewood[9].

引 B. 當$Q\leqslant e^{\sqrt{\log x}}$時,除某一$Q_1$之倍數外,當$(l,Q)=1$時,均有

$$P(x,Q)=\frac{x}{\varphi(Q)\log x}+O(xe^{-c_6\sqrt{\log x}}),$$

當$Q_1|Q$時,上式之右端還需添上

$$O\left(\frac{x^{1-c(\varepsilon)/Q_1^{\varepsilon}}}{\varphi(Q)}\right),$$

此處$\varepsilon>0$爲任意正數, c_6及與“O”有關的常數都是絕對常數, Q_1是“被除外”的特徵$\tilde{\chi}$的模.

證明參看 Titchmarsh[10] Page[11] 及 Siegel[12].

由於$a_p\leqslant\log x$, 故得

引 C. 當$1\leqslant Q<\sqrt{x}$時,下式一致成立

$$P(x,Q)<\frac{2x\log x}{\varphi(Q)}.$$

吾人將滿足下面條件

$$p_1'>\cdots>p_u',\ p_i'\nmid M,\ p_i'\leqslant Z^{\frac{1}{h^{[\frac{i}{2}]}}}\quad(1\leqslant i\leqslant 2t+1),\ p_i'\leqslant p_{r_t}\quad(i>2t+1)$$

的正整數$Q=p_1'\cdots p_u'M$的集合記爲E.

若$Q\in E$, 寫$Q=p_1'q_1$, $q_1=p_2'q_2,\cdots,q_{u-1}=p_u'q_u$, $q_u=M$, 則整數$q_1,\cdots,q_u$稱爲Q的對角綫因子. 顯然當$Q\in E$時,所有Q的對角綫因子皆屬於E.

記$K=\prod\limits_{\substack{p\leqslant p_{r_t}\\ p\nmid M}}p$.

以下的引理均可從E的定義簡單推出,故證明略去. 又若無特殊聲明, $c_7,c_8,\cdots$均爲

僅與 k 及 M 有關的常數。

引 4. 以 $\nu(Q)$ 表示 ν 的素因子的個數，則當 $x > c_7$ 時 $\nu(Q) < 10(k+1)\log\log x$.

引 5. 集合 E 的元素的個數不超過 KZ^f，此處 $f = 1 + \frac{2}{h-1}$.

引 6. 若 $Q \in E$，滿足 $Q = p_1' q_1$，$p_1' < q_1^{\frac{1}{\nu}}$，$p_1' > MK$. 這種 Q 的個數不超過 $Z^{\frac{g\nu}{h^{\nu/2}}}$，此處 g 爲僅與 k 有關的正常數。

引 7. 命 $\{p^*\}$ 爲具有下面性質的數列：在任意區間 $A \leqslant p^* < 2A$ 中最多只包含這個數列中的 $A^{3/4}$ 個元素。則

$$\sum_{p^*>B} \frac{1}{p^*} \leqslant \left(\frac{1}{1-2^{-1/4}}\right) B^{-1/4}.$$

引 8. $\displaystyle\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \log x + O(1).$

引 9. 當 $n \geqslant 2$ 時，存在絕對常數 c_8 使 $\varphi(n) > \frac{c_8 n}{\log n}$.

§5. 引 2 的證明

記

$$K_{\chi_Q}(x) = \sum_{p\leqslant x} \chi_Q(p) a_p.$$

當 $(l, Q) = 1$ 時，有

$$P(x, Q) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{(\chi_Q)} \bar{\chi}_Q(l) K_{\chi_Q}(x). \tag{10}$$

由引 4 及 E 的定義可知

$$\begin{aligned} \bar{R} &\leqslant (k+1)^{2n+1} \sum_{Q\in E} |R_Q(x)| \leqslant e^{(2n+1)\log(k+3)} \sum_{Q\in E} |R_Q(x)| \leqslant \\ &\leqslant e^{10(k+1)\log(k+3)\log\log x} \sum_{Q\in E} |R_Q(x)|. \end{aligned} \tag{11}$$

若 $Q = p_1' q_1 \in E$，$Q > e^{(\log x)^{2/5}}$，則由引 4 得

$$p_1' > Q^{\frac{1}{\nu(Q)}} > 2e^{(\log x)^{1/3}},\quad x > c_9.$$

又由於 $q_1 < p_1'^{\nu(Q)}$ 乃得

$$k_1 = \frac{\log q_1}{\log \frac{p_1'}{2}} + 1 = \frac{\log q_1}{\log p_1'}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log p_1'}\right)\right) < 11(k+1)\log\log x, x > c_{10} \tag{12}$$

取 $B = 2e^{(\log x)^{1/3}}$，$A = 2^n B (n = 1, 2, \cdots)$. 固定 q_1 時，吾人可以將引 A 用之於區間 $A \leqslant p < 2A$. 爲此引入下面兩條件

(i) 若 $Q > e^{(\log x)^{2/5}}$，則曰滿足條件 I.

(ii) 若 $Q \in E$，$Q = p_1' q_1$，對 q_1 而言，p_1' 非引 A 意義之下被除外者，則曰滿足條件 II.

若條件 I, II 均滿足，則由引 A 及(10)可知

$$P(x,Q)=\frac{1}{\varphi(p_1')}P(x,q_1)+O(x^{1-\frac{\delta_2}{k_1+1}}\log x).$$

若此 q_1 亦復滿足條件 I, II，則又可以繼續上面的手續．一直到條件 I, II 中有一個不成立爲止．設這手續共進行了 s 次，則

$$P(x,Q)=\frac{1}{\varphi(p_1'\cdots p_S')}P(x,q_s)+O\left(\sum_{l=1}^{S}\frac{x^{1-\frac{\delta_2}{k_l+1}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{l-1}}\right)}\log x\right),$$

此處 $q_0=Q$, $k_l=\dfrac{\log q_l}{\log\frac{p_e'}{2}}+1$.

若條件 I 不滿足，即 $q_s<e^{(\log x)^{2/5}}$. 當 $Q_1\nmid q_s$ 時，則由引 B 得

$$P(x,q_s)=\frac{x}{\varphi(q_s)\log x}+O(xe^{-c_6\sqrt{\log x}});$$

當 $Q_1|q_s$ 時，還需在上式之右端添上 $O\left(\dfrac{x^{1-c(\varepsilon)/Q_1^{\varepsilon}}}{\varphi(q_s)}\right)$.

若條件 II 不成立，由引 C 得

$$P(x,q_s)=\frac{x}{\varphi(q_s)\log x}+O\left(\frac{x\log x}{\varphi(q_s)}\right).$$

總之，得到下列四種類型的誤差項：

$$\text{I) }\frac{x\log x}{\varphi(Q)}\quad\text{II) }\frac{xe^{-c_6\sqrt{\log x}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_s}\right)}\quad\text{III) }\frac{x^{1-c(\varepsilon)/Q_1^{\varepsilon}}}{\varphi(Q)}\quad\text{IV) }\frac{x^{1-\frac{\delta_2}{k_l+1}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{l-1}}\right)}\log x.$$

對於 $\sum\limits_{Q\in E}|R_Q(x)|$ 中屬於型 I, II, III, IV 者分別記之以 $R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{II}}, R_{\mathrm{III}}, R_{\mathrm{IV}}$.

(i) 由引 4, 引 7, 引 8 得

$$R_{\mathrm{I}}<c_{11}x\log^3 x/e^{1/4(\log x)^{1/3}},\quad x>c_{12}.$$

(ii) 由引 8 得

$$R_{\mathrm{II}}<c_{13}x\log x\cdot e^{(\log x)^{2/5}-c_6\sqrt{\log x}},\quad x>c_{14}.$$

(iii) 由引 8, 引 9 並取 $\varepsilon=\dfrac{1}{18(k+1)\log(k+3)}$ 乃得

$$R_{\mathrm{III}}<c_{15}x\log^3 x\cdot e^{-18(k+1)\log(k+3)\log\log x},\ x>c_{16}.$$

(iv) 以 $R_{\mathrm{IV}}^{(1)}$ 表示 R_{IV} 中 $k_l\leqslant 2$ 之諸項之和．取

$$Z=x^{\frac{1}{N}},\quad N\geqslant\frac{4f}{\delta_2}\ (N\text{ 以後再定}).$$

故由引 5 得

$$R_{\mathrm{IV}}^{(1)}<c_{17}Z^f\cdot x^{1-\frac{\delta_2}{3}}\log x=c_{17}x^{1-\frac{\delta_2}{12}}\log x,\ x>c_{18}.$$

(v) 以 $R_{\mathrm{IV}}^{(2)}$ 表示 R_{IV} 中 $k_l \geqslant 2$ 之諸項之和．由(12)可知 k_l 滿足 $2\nu \leqslant k_l < 2\nu + 2$，$\nu = 1, 2, \cdots, \left[\frac{11(k+1)\log\log x}{2}\right]$．又易知 $p'_c < q_c^{\frac{1}{\nu}}$，$p'_c > 2e^{(\log x)^{1/3}} > MK$，$(x > c_{19})$．故由引 6 得知

$$R_{\mathrm{IV}}^{(2)} < c_{20} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{11}{2}(k+1)\log\log x\right]} x^{1-\frac{\delta_2}{2\nu+4}} Z^{\frac{g\nu}{h^{\nu/2}}} \log^2 x,\quad x > c_{21}.$$

取

$$N = \mathrm{Max}\left(\frac{4f}{\delta_2}, \frac{4dg}{\delta_2}\right),\quad d = \mathop{\mathrm{Max}}_{\nu=1,2,\cdots} \frac{\nu(\nu+2)}{h^{\nu/2}}\text{**)}. \tag{13}$$

故得

$$R_{\mathrm{IV}}^{(2)} < c_{22}\, x \log^3 x \cdot e^{-\frac{\delta_2 \log x}{22(k+1)\log\log x - \delta}},\quad x > c_{23}.$$

綜合(i)，(ii)，(iii)，(iv)，(v)及(11)式乃得

$$\overline{R} \leqslant c_{24}\, x\, e^{-8(k+1)\log(k+3)\log\log x} \log^3 x < c_{24} \frac{x}{\log^{5(k+1)} x},\quad x > c_{25}. \tag{14}$$

故由引 3 得

引 10. 存在僅與 k, M 有關的常數 c_{26} 及 X_3，當 $x > X_3$ 時

$$\widetilde{M}_{x^{\frac{1}{N}}}(x) > \frac{c_{26}\, x}{\log^{k+2} x}\quad (x > X_3),$$

此處 N 僅與 k 有關．

引 2 的證明： 記 $\beta = \frac{1}{N}$．則

$$\widetilde{M}_{x^\beta}(x) \leqslant \log x \cdot e^{-2\frac{\log x}{x}} M_{x^\beta}\left(\frac{(k+3)x \log\log x}{\log x}\right) + \log x \cdot e^{-(k+3)\log\log x}\pi(x) \leqslant$$

$$\leqslant \log x \cdot M_{x^\beta}\left(\frac{(k+3)\, x \log\log x}{\log x}\right) + O\left(\frac{x}{\log^{k+3} x}\right)$$

由引 10 乃得

$$M_{x^\beta}\left(\frac{(k+3)\, x \log\log x}{\log x}\right) \geqslant \frac{c_{27}\, x}{\log^{k+3} x},\quad x > c_{28}.$$

命 $\frac{(k+3)\, x \log\log x}{\log x} = y$．乃得

$$M_{y^\beta}(y) > \frac{c_2\, y}{\log^{k+2} y \log\log y},\quad y > X_2.$$

引理證完．

§6. 基本引理的應用

引 11. 記 $\sigma_0 = 1$，$\sigma_\nu = \nu\,(1 \leqslant \nu \leqslant k)$．對於任意 k 個非負實數 $a_1, \cdots, a_k$ 及 $\varepsilon > 0$，

**) 由於 $h = (1.25)^{\frac{1}{k+1}} > 1$，故 $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y(y+2)}{h^{y/2}} = 0$．因此 d 的存在性無問題．且 d 僅與 k 有關．

皆存在僅與諸 a_i 及 ε 有關且適合基本引理之要求之正整數 $m_0,\cdots,m_k$，使

$$\left|\frac{\dfrac{\varphi(\sigma_\nu m_\nu)}{\sigma_\nu m_\nu}}{\dfrac{\varphi(\sigma_{\nu-1}m_{\nu-1})}{\sigma_{\nu-1}m_{\nu-1}}}-a_\nu\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).\tag{15}$$

證：置 $\rho_\nu=\dfrac{\varphi(\nu)}{\nu}\,(1\leqslant\nu\leqslant k)$，$\rho_0=\dfrac{\varphi((k+1)!^2)}{(k+1)!^2}$．必存在有理數 $\dfrac{b_\nu}{d_\nu}>0\,(1\leqslant$ $\leqslant\nu\leqslant k)$使

$$\left|\frac{b_\nu}{d_\nu}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\quad(1\leqslant\nu\leqslant k),$$

即

$$\left|\frac{b_1\cdots b_{\nu-1}b_\nu d_{\nu+1}\cdots d_k}{b_1\cdots b_{\nu-1}d_\nu d_{\nu+1}\cdots d_k}-a_\nu\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).$$

命

$$\frac{b_1\cdots b_{\nu-1}d_\nu d_{\nu+1}\cdots d_k}{b_1\cdots b_k d_1\cdots d_k}=\eta_{\nu-1}\quad(1\leqslant\nu\leqslant k+1).\text{ 故}$$

$$\left|\frac{\eta_\nu}{\eta_{\nu-1}}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).$$

因爲 $0<\eta_\nu\leqslant 1\,(0\leqslant\nu\leqslant k)$ 及 $\prod\limits_p\left(1-\dfrac{1}{p}\right)=0$，故對於任意 $\varepsilon'>0$，皆可選取素因子大於 $k+1$ 且兩兩互素之正整數 $m_0',m_1,\cdots,m_k$ 使

$$\left|\eta_\nu-\frac{\varphi(m_\nu)}{m_\nu}\right|<\varepsilon'\,(1\leqslant\nu\leqslant k),\ \left|\frac{\varphi(m_0')}{m_0'}-\eta_0\right|<\varepsilon'.$$

因此，我們可以取 $\varepsilon'=\varepsilon'(a,\varepsilon,\rho)$ 足够小，使

$$\left|\frac{\dfrac{\varphi(m_\nu)}{m_\nu}}{\dfrac{\varphi(m_{\nu-1})}{m_{\nu-1}}}-a_\nu\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\rho_{\nu-1}}{\rho_\nu}\,(2\leqslant\nu\leqslant k),\ \left|\frac{\dfrac{\varphi(m_1)}{m_1}}{\dfrac{\varphi(m_0')}{m_0'}}-a_1\frac{\rho_0}{\rho_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

記 $m_0=(k+1)!^2m_0'$．即得引理．

將引 11 中之 $\varphi(n)$ 換爲 $\sigma(n)$ 即得引 12.

定理 1. 對於任意給予的 k 個非負實數 $a_1,\cdots,a_k$ 及 $\varepsilon>0$，皆存在素數 p，使

$$\left|\frac{\varphi(p+\nu+1)}{\varphi(p+\nu)}-a_\nu\right|<\varepsilon\quad(1\leqslant\nu\leqslant k).\tag{16}$$

進而言之，存在僅與 ε 及諸 a_ν 有關之正常數 c_{29} 及 X_4，當 $x>X_4$ 時，在任何區間 $1<p\leqslant$ $\leqslant x$ 內，適合(16)式的素數個數不少於 $c_{29}\dfrac{x}{\log^{k+2}x\log\log x}$.

證：由引 11，先選取僅與諸 a_i 及 ε 有關，且適合基本引理要求的正整數 $m_0,m_1,\cdots,$ m_k 使(15)式成立．固定諸 m_i 之後，命$(p,x_0,\cdots,x_k)$爲(2)式適合(3)式及 $Z=x^2$ 之解．

由於$(x_i, m_0\cdots m_k) = 1$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. 故

$$\frac{\varphi(p+\nu+1)}{\varphi(p+\nu)} = \frac{\varphi(\sigma_\nu m_\nu x_\nu)}{\varphi(\sigma_{\nu-1} m_{\nu-1} x_{\nu-1})} =$$

$$= \frac{\dfrac{\varphi(\sigma_\nu m_\nu)}{\sigma_\nu m_\nu}}{\dfrac{\varphi(\sigma_{\nu-1} m_{\nu-1})}{\sigma_{\nu-1} m_{\nu-1}}} \cdot \frac{\dfrac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu}}{\dfrac{\varphi(x_{\nu-1})}{x_{\nu-1}}} \cdot \frac{p+\nu+1}{p+\nu}. \tag{17}$$

因爲 x_ν 的素因子皆大於 x^α, 但 $x_\nu \leqslant x$. 故 x_ν 的素因子的個數不超過 $\left[\frac{1}{\alpha}\right]$. 故

$$1 \geqslant \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu} = \prod_{p' | x_\nu} \left(1 - \frac{1}{p'}\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{18}$$

由(15),(17),(18)可知存在 c_{30}, 當 $x > p > c_{30}(\alpha, \varepsilon)$時, (16)式成立. 這就證明了對於方程組(2)適合(3)及 $Z = x^\alpha$ 及$p > c_{30}$ 的一組解$(p, x_0, \cdots, x_k)$, 此 p 即適合(16)式. 但方程組(2)適合 $p \leqslant c_{30}$ 的解數不超過 c_{20}. 故由基本引理得出定理 1.

將定理 1 中的 $\varphi(n)$換爲 $\sigma(n)$, c_{29} 及 X_4 分別換爲 c_{31} 及 X_5 即得定理 2.

定理 3. 命 k 爲一正整數, 存在僅 k 有關的常數 γ 使對於任意給予 $k+1$ 個正整數 $a_0, a_1, \cdots, a_k$. 皆存在素數 p 使

$$a_\nu \leqslant d(p+\nu+1) \leqslant \gamma a_\nu \ (0 \leqslant \nu \leqslant k). \tag{19}$$

進而言之, 存在僅與諸 a_ν 有關之正常數 c_{32} 及 X_6, 當 $x > X_6$ 時, 在任何區間 $1 < p \leqslant x$ 內適合(19)式的素數個數不少於$\dfrac{c_{32}\, x}{\log^{k+2} x \log\log x}$.

證: 命 $a_0, \cdots, a_k$ 分別適合

$$2^{\alpha_\nu} \leqslant a_\nu < 2^{\alpha_\nu + 1} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant k).$$

在(1)式中取 $\alpha_\nu + 1 = t_\nu$. 固定諸 m_i 之後,命$(p, x_0, \cdots, x_k)$爲(2)式適合(3)及 $Z = x^\alpha$ 之解. 由於 x_ν 的素因子皆大於 x^α, 故 x_ν 爲不超過 $\left[\frac{1}{\alpha}\right]$個素數的乘積. 記

$$\gamma = 2^{\frac{1}{\alpha}+1} (k+1)!^2 \tag{20}$$

則

$$d(p+\nu+1) = d(\sigma_\nu m_\nu x_\nu) \geqslant d(m_\nu) d(x_\nu) \geqslant 2^{t_\nu} > a_\nu;$$

$$d(p+\nu+1) = d(\sigma_\nu m_\nu x_\nu) \leqslant d(\sigma_0) d(m_\nu) d(x_\nu) <$$

$$< (k+1)!^2 2^{t_\nu} 2^{\left[\frac{1}{\alpha}\right]} < \gamma a_\nu \quad (0 \leqslant \nu \leqslant k).$$

故得定理.

由定理 3 立刻推出

定理 4. 對於任意給予 k 個數 $a_1, \cdots, a_k$, 此處諸 a_i 或爲 0, 或爲 $+\infty$. 則存在素數列$\{p_j\}$使

$$\lim_{j\to\infty} \frac{d(p_j+\nu+1)}{d(p_j+\nu)} = a_\nu \quad (1 \leqslant \nu \leqslant k).$$

最後筆者提出下問題:是否對於數論函數 $d(n)$亦有像定理 1 所說的,與$\varphi(n)$同様美好的性質呢? 尚有待進一步揭示.

參考文獻

[1] Somayajulu, B.S.K.R., The Euler's totient function $\varphi(n)$, *Math. Stud.* **18** (1950), 31.

[2] Schinzel, A. and Sierpiński, W., Sur quelques propiétés des fonctions $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 2 (1954), 463.

[3] Schinzel, A., Quelques théorèmes sur les fonctions $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 2 (1954), 467; Sur une propriété du nombre de diviseurs, *Pub. Math.* **3** (1954), 261; On Functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 8 (1955), 415.

[4] Шинцель, А. и Ванг И. (王元), О некоторых свойствах функций $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ и $\theta(n)$, Польской АН, отд 3, № 4 (1956), 201; A Note on Some Properties of the Functions $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ and $\theta(n)$, *Ann. Polon. Math.* (in press).

[5] 邵品琮,論某一類數論函數值的分佈問題,北大學報, 3 (1956), 261.

[6] Реньи, А., О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, *ИАН СССР*, 12 (1948), 57.

[7] 王元,表大偶數為一個素數及一個不超過四個素數的乘積之和,數學學報, 6:4 (1956), 565.

[8] Линник, Ю. В., Об L-рядах дирихре и суммах по простых числам, *Матем. сб*; **15** (57)(1944), 3.

[9] Littlewood, J. E., On the Class number of corpus $P(\sqrt{-k})$., *Proc. Lond. Math. Soc.* **27** (1928), 315.

[10] Titchmarsh, E. C., Adivisor problem, Rend. del circolo matem. di palermo, 54 (1930), 414.

[11] Page, A., On number of primes in the arithmetic progression, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **39** (1935), 116.

[12] Siegel, C. L., Uber die classenzahle quadratischen Zahlenkoper, Acta Arith. I(1936), 83.

A NOTE ON SOME PROPERTIES OF THE ARITHMETICAL FUNCTIONS $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ AND $d(n)$

WANG YUAN

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Let $\varphi(n)$ be Euler function, $\sigma(n)$ denote the sum of divisors of n and $d(n)$ be the divisor function. In this paper we prove the following four theorems.

Theorem 1. For any given sequence of k non-negative numbers $a_1, \cdots, a_k$ and $\varepsilon > 0$, there exists a prime number p such that

$$\left|\frac{\varphi(p+\nu+1)}{\varphi(p+\nu)} - a_\nu\right| < \varepsilon \ (1 \leqslant \nu \leqslant k). \tag{1}$$

There exist positive constants $c_0(a,\varepsilon)$ and $X_0(a,\varepsilon)$ such that the number of primes p satisfying (1) in the interval $1 < p \leqslant x$ is greater than

$$\frac{c_0 x}{\log^{k+2} x \operatorname{loglog} x} \text{ for } x > X_0.$$

Theorem 2 is obtained from Theorem 1 by replacing the letters φ by σ, c_0 by c_1 and X_0 by X_1.

Theorem 3. For any given natural number k, there exists a constant γ depending on k only such that for any given sequence of $k+1$ positive integers $a_0, a_1, \cdots, a_k$, there exists a prime number p, such that

$$a_\nu \leqslant d(p+\nu+1) \leqslant \gamma a_\nu \quad (0 \leqslant \nu \leqslant k). \tag{2}$$

There exist positive constant $c_2(a)$ and $X_2(a)$ such that the number of primes p satisfying (2) in the interval $1 \leqslant p \leqslant x$ is greater than

$$\frac{c_2\, x}{\log^{k+2} x \log\log x} \text{ for } x > X_2.$$

Theorem 4. For any given sequence of k numbers $a_1, \cdots, a_k$, where $a_i = 0$ or $+\infty$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, there exists an infinite sequence of prime numbers $\{p_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ such that

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(p_j+\nu+1)}{\varphi(p_j+\nu)} = a_\nu \ (1 \leqslant \nu \leqslant k).$$

These theorems improve some results of the author[4], Schinzel[4,8], and Shao[5].

The proof of these theorems depends on the following

Fundamental Lemma. Let

$$m_0 = (k+1)!^2\, q_0, \cdots q_{0t_0},\ m_i = q_i, \cdots q_{it_i}\ (1 \leqslant i \leqslant k)$$

be given natural numbers, where $q_{\mu\nu}$ $(0 \leqslant \mu \leqslant k,\ 1 \leqslant \nu \leqslant t_\mu)$ are prime numbers greater than $k+1$ and relatively prime in pairs.

If $x > Z > (m_0 m_1 \cdots m_k)^2$, and $N_Z(x)$ denote the number of positive solutions $(p, x_0, x_1 \cdots, x_k)$ of the system of equations

$$\begin{cases} p+1 = m_0 x_0 \\ p+\nu+1 = \nu m_\nu x_\nu \ (1 \leqslant \nu \leqslant k) \end{cases}$$

satisfying the conditions

$$1 < p \leqslant x,\ \text{if } p' | x_i, \text{ then } p' > Z\ (0 \leqslant i \leqslant k),$$

where p and p' denote primes, than there exist positive constants c_3, X_3 dependent only on m_i, and α, dependent only on k such that

$$N_{x^\alpha}(x) > \frac{c_3 x}{\log^{k+2} x \log\log x} \quad (x > X_3).$$

If $x > Z > (m_0 \cdots m_k)^2$, λ is a given positive number in the interval $1 \leqslant \lambda \leqslant$ $\leqslant (m_0 \cdots m_k)^2$ satisfying $(\lambda, m_0 \cdots m_k) = 1$ and $p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leqslant Z$ are all prime numbers that do not divide $m_0 \cdots m_k$ and do not exceed Z, and if a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant k+1)$are given positive numbers satisfying the conditions $1 \leqslant a_{ij} <$ $< p_i$ and $j_1 \neq j_2$ impries $a_{ij_1} \neq a_{ij_2}$, then we can define $M_Z(x)$ as the number of primes p satisfying the conditions

$$1 < p \leqslant x,\ p \equiv \lambda \ (\mathrm{mod}\ (m_0 \cdots m_k)^2),\ p \not\equiv a_{ij}\ (\mathrm{mod}\ p_i)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant k+1).$$

Fundamental Lemma obviously follows from the following two lemmas.

Lemma 1. There exist a_{ij} and λ such that $M_Z(x) \leqslant N_Z(x)$[4].

Lemma 2. There exist positive constants c_4, X_4, dependent only on m_i, and positive constant β, dependent only on k, such that

$$M_{x^\beta}(x) > \frac{c_4 x}{\log^{k+2} x \log\log x}$$

for any given λ and a_{ij}.

The proof of Lemma 2 depends essentially on the methods of Линник and Reńyi.