RECHERCHES SUR LA NORMALITÉ DES FAMILLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES À DES VALEURS MULTIPLES*

II. GÉNÉRALISATIONS

YANG LO (杨 乐) ET CHANG KUAN-HEO (张广厚)

(Institut de Mathématiques, Academia Sinica)

RÉSUMÉ

Principalement est établi le critère général: Une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) où tous les zéros de $f - a_i$ ($i = 1, \dots, p$) ont un ordre de multiplicité $\geq m_i$ et ceux de $f^{(k)} - b_j$ ($j = 1, \dots, q; q \geq 0$) ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$, avec la condition

$$\sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} < (p-1) \cdot \max(q, 1) + q,$$

$$m_i > k, \quad (i = 1, \dots, p)$$

est normale dans ce domaine, pourvu que a_i ($i = 1, \dots, p$) et b_j ($j = 1, \dots, q$) soient deux groupes de nombres finis et distincts entre eux dans chaque groupe (b_j différents de zéro), et que m_i ($i = 1, \dots, p$) et n_j ($j = 1, \dots, q$) soient les $p + q$ entiers positifs, supérieurs ou égaux à deux. Puis on obtient des critères de normalité des familles de fonctions méromorphes à des valeurs multiples.

PREMIÈRE PARTIE

IV. CAS PLUS GÉNÉRAL

8. Nous allons d'abord donner une inégalité avec un reste convenable, qui servira de base pour la recherche de notre critère général en vue.

Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R (\leq \infty)$, et soient a une valeur finie quelconque et l un entier positif quelconque. Nous désignons par $N^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right)$ l'indice de densité des zéros de $\varphi(z) - a$, chaque zéro étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité m si $m \leq l$ et égal à l si $m > l$. En particulier, on a

$$N^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right).$$

* Manuscrit reçu le 3 juin, 1965.

Le Mémoire présent est la suite d'un autre déjà communiqué (*Sci. Sin.*, Vol. 14, No. 9, 1965).

Nous désignons aussi, pour un entier positif λ , par $N_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right)$ l'indice de densité des zéros de $\varphi(z) - a$, chaque zéro étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité m si $m \leq \min(\lambda, l)$, égal à l si $l < m \leq \lambda$ et égal à zéro si $m > \lambda$; et posons

$$N_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = N^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) - N_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right).$$

On a en particulier

$$N_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = \bar{N}_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right),$$

$$N_{\lambda}^{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = \bar{N}_{(l)}\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right).$$

Dans le cas où $a = \infty$, nous avons les notations $N^{(l)}(r, \varphi)$, $N_{\lambda}^{(l)}(r, \varphi)$ et $N_{\lambda}^{(l)}(r, \varphi)$.

Théorème 6. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R$ ($R \leq \infty$), et soient a_i ($i = 1, \dots, p$) et b_j ($j = 1, \dots, q$) deux groupes de nombres finis et distincts entre eux dans chaque groupe (b_j différents de zéro); puis on désigne par m_i ($i = 1, \dots, p$), n_j ($j = 1, \dots, q$) et m les $p + q + 1$ entiers positifs (≥ 2) satisfaisant aux conditions

$$\left. \begin{aligned} pq &> \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} + \frac{1}{m} \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}\right), \\ q &> \frac{kq+1}{m_i} \quad (i = 1, \dots, p). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Si $f(0) \neq 0, \infty$, a_i ; $f^{(k)}(0) \neq 0$, b_j et $f^{(k+1)}(0) \neq 0$, on a pour $0 < r < \rho < R$ l'inégalité

$$\begin{aligned} &\left\{ pq - \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} - \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} - \frac{1}{m} \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}\right) \right\} T(r, f) < \\ &< \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}\right) \bar{N}_{m-1}(r, f) + (q-1) \sum_{i=1}^p N_{m_i-1}^{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^p N_{m_i-1}^{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^q \bar{N}_{n_j-1}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + S(r, f) \end{aligned} \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned} S(r, f) &< \alpha \left(\log^+ |f(0)| + \log^+ |f^{(k)}(0)| + \log^+ \frac{1}{|f^{(k)}(0)|} + \log^+ \frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|} \right) + \\ &+ \alpha' \log \frac{1}{\delta} + \beta \log \frac{1}{r} + \beta' \log \frac{\rho}{r} + \beta'' \log \frac{\rho}{\rho-r} + \gamma \log^+ T(\rho, f), \end{aligned} \quad (28)$$

où $\alpha, \alpha', \beta, \dots, \gamma$ sont des constantes qui ne dépendent que de k, p, q, m_i et n_j , et δ est égal à la plus petite des distances sphériques de $a_1, \dots, a_p, \infty$ pris deux à deux et à celle de $b_1, \dots, b_q, 0, \infty$ pris deux à deux.

En procédant comme M. H. Milloux^[6] l'a fait, nous obtenons pour $f^{(k)}(z)$ au lieu de $f'(z)$,

$$pT(r, f) < \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \left\{T(r, f^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\} + \\ + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{\prod_{i=1}^p (f-a_i)}\right) + \log \left| \frac{\prod_{i=1}^p (f(0) - a_i)}{f^{(k)}(0)} \right| + p \log \frac{2}{\delta}. \quad (29)$$

D'autre part, appliquons la seconde inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna à $f^{(k)}(z)$ pour les $q+2$ nombres $0, \infty, b_j (j=1, \dots, q)$; il vient

$$qT(r, f^{(k)}) \leq \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \bar{N}(r, f^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + S_1(r) \quad (30)$$

avec

$$S_1(r) = 2m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b_j}\right) + \sum_{j=1}^q \log |f^{(k)}(0) - b_j| + \\ + \log |f^{(k)}(0)| + \log \frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|} + C \log \frac{1}{\delta}.$$

Au moyen de (29) et de (30), on trouve l'inégalité

$$pqT(r, f) < \bar{N}(r, f) + q \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) - \\ - \left\{(q-1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right\} + S_2(r), \quad (31)$$

où

$$S_2(r) = S_1(r) + q \sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right) + q \sum_{i=1}^p \log |f(0) - a_i| + \\ + q \log \frac{1}{|f^{(k)}(0)|} + C \log \frac{2}{\delta}.$$

Si α est pour $f(z) - a_i$ un zéro multiple d'ordre $m \geq k+1$, il entre $m-k$ fois dans $N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)$ et $m-k-1$ fois dans $N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$. Ce qui permet de mettre l'inégalité (31) sous une forme réduite. Nous avons

$$pqT(r, f) < \bar{N}(r, f) + (q-1) \left\{ \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \right\} + \\ + \left\{ \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) \right\} + S_2(r) \leq \\ \leq \bar{N}(r, f) + (q-1) \sum_{i=1}^p N^{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^p N^{(k+1)}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^q \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + S_2(r). \quad (32)$$

Observons que

$$\begin{aligned} N^l\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) &= N_{m_i-1}^l\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + N_{m_i-1}^l\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq \\ &\leq N_{m_i-1}^l\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \frac{l}{m_i} \left\{ T(r, f) + \log \frac{1}{|f(0)-a_i|} + \right. \\ &\quad \left. + \log^+ |a_i| + \log 2 \right\}, \quad (l = k, k+1; i = 1, \dots, p) \end{aligned}$$

$$\bar{N}(r, f) = \bar{N}_{m-1}(r, f) + \bar{N}_{(m-1)}(r, f) \leq \bar{N}_{m-1}(r, f) + \frac{1}{m} T(r, f),$$

$$\begin{aligned} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) &\leq \bar{N}_{n_j-1}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + \\ &+ \frac{1}{n_j} \left\{ T(r, f^{(k)}) + \log \frac{1}{|f^{(k)}(0)-b_j|} + \log^+ |b_j| + \log 2 \right\}, \quad (j = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

et

$$T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_1}\right) + \log^+ |a_1| + \log 2,$$

nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} &\left\{ pq - \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} - \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} - \frac{1}{m} \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} \right) \right\} T(r, f) < \\ &< \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} \right) \bar{N}_{m-1}(r, f) + (q-1) \sum_{i=1}^p N_{m_i-1}^k\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^p N_{m_i-1}^{k+1}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^q \bar{N}_{n_j-1}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + S_3(r), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_3(r) &= \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_1}\right) + q \sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right) + 2m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b_j}\right) + \sum_{i=1}^p \left(q - \frac{kq+1}{m_i} \right) \log |f(0)-a_i| + \\ &+ \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \log |f^{(k)}(0)-b_j| + (q-1) \log \frac{1}{|f^{(k)}(0)|} + \\ &+ \log \frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|} + C \log \frac{2}{\delta}. \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse du théorème, on a

$$q - \frac{kq+1}{m_i} > 0 \quad (i = 1, \dots, p)$$

et

$$1 - \frac{1}{n_j} > 0. \quad (j = 1, \dots, q)$$

Donc la démonstration peut s'achever comme celle du lemme 1.

9. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| < R (\leq \infty)$, nous pouvons prendre $m = \infty$ dans l'inégalité (27). On a donc le théorème d'impossibilité suivant.

Théorème 7. Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, et soient $m_i (i = 1, \dots, p)$ et $n_j (j = 1, \dots, q)$ deux groupes de entiers positifs (≥ 2) satisfaisant à la condition¹⁾

$$pq > \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}. \quad (33)$$

Si nous conservons les significations de $a_i (i = 1, \dots, p)$ et de $b_j (j = 1, \dots, q)$, alors une seule des deux circonstances suivantes peut se présenter:

1°) Tous les zéros de $f - a_i (i = 1, \dots, p)$ ont un ordre de multiplicité $\geq m_i$;

2°) Tous les zéros de $f^{(k)} - b_j (j = 1, \dots, q)$ ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$.

Prenons par exemple $p = 1, q = 2; m_1 = 4, n_j = 2 (j = 1, 2); k = 1$. La condition (33) est vérifiée, et on a la conclusion suivante.

Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, une seule des deux circonstances suivantes peut se présenter:

1°) Les zéros de $f - a$ ont chacun un ordre de multiplicité ≥ 4 ;

2°) Les zéros de $f' - b_j (j = 1, 2)$ ont chacun un ordre de multiplicité ≥ 2 ,

où a est une valeur finie et $b_j (j = 1, 2)$ sont deux valeurs finies non nulles et distinctes entre eux.

10. Le théorème 6 nous permet de donner le théorème préliminaire.

Théorème 8. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < R (< \infty)$, et soient $m_i (i = 1, \dots, p)$ et $n_j (j = 1, \dots, q)$ deux groupes de entiers positifs (≥ 2) satisfaisant aux conditions

$$pq > \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}$$

et

$$q > \frac{kq+1}{m_i} \quad (i = 1, \dots, p)$$

Si l'on conserve les significations de $a_i (i = 1, \dots, p)$ et de $b_j (j = 1, \dots, q)$ et supposons que les zéros de $f - a_i$ ont chacun un ordre de multiplicité $\geq m_i$ et ceux de $f^{(k)} - b_j$ ont chacun un ordre de multiplicité $\geq n_j$, et que $f(0) \neq 0, f^{(k)}(0) \neq 0, f^{(k+1)}(0) \neq 0$; alors on a pour $0 < r < R$ l'inégalité

$$\log M(r, f) < \frac{CR}{R-r} \left\{ \log^+ |f(0)| + \log^+ (R^k |f^{(k)}(0)|) + \right. \\ \left. + \log^+ \frac{1}{R^k |f^{(k)}(0)|} + \log^+ \frac{1}{R^{k+1} |f^{(k+1)}(0)|} + \log \frac{2R}{R-r} \right\} \quad (34)$$

où C est une constante qui ne dépend que de $\delta, k, m_i, n_j, p, q; \delta$ étant au plus égal à la

1) Dans ce théorème, on n'a pas à considérer la condition $q > \frac{kq+1}{m_i}$, car elle n'est utile que pour le reste (28) de l'inégalité (27).

plus petite des distances sphériques de $a_1, \dots, a_p, \infty$ pris deux à deux et à celle de $b_1, \dots, b_q, 0, \infty$ pris deux à deux.

V. UN CRITÈRE GÉNÉRAL

11. En s'appuyant sur le théorème 8, nous allons établir le critère suivant:

Théorème 9. Une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) où tous les zéros de $f - a_i (i = 1, \dots, p)$ ont un ordre de multiplicité $\geq m_i$ et ceux de $f^{(k)} - b_j (j = 1, \dots, q; q \geq 0)$ ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$, avec la condition

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} < (p-1) \cdot \max(q, 1) + q, \\ m_i > k, \quad (i = 1, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

est normale dans ce domaine, pourvu que $a_i (i = 1, \dots, p)$ et $b_j (j = 1, \dots, q)$ soient deux groupes de nombres finis et distincts entre eux dans chaque groupe (b_j différents de zéro), et que $m_i (i = 1, \dots, p)$ et $n_j (j = 1, \dots, q)$ soient $p+q$ entiers positifs supérieurs ou égaux à deux.

Démonstration: Lorsque $q = 0$, la condition (35) devient

$$\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 1.$$

D'après le théorème 2 de l'article [9], la démonstration est immédiate.

Dans le cas $q \geq 1$, nous pouvons supposer que $a_1 = 0$ (Dans le cas contraire, il suffit de considérer $f - a_1$ au lieu de f). En vertu de la remarque faite dans la démonstration du théorème 1, on est ramené à la proposition suivante:

Etant donnée une suite quelconque $\{f_n(z)\}$ de la famille envisagée dans le cercle unité où chaque fonction satisfait aux conditions du théorème, on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément, dans le cercle $|z| < \frac{1}{16}$, vers une fonction limite qui peut être la constante infinie.

Pour démontrer cette proposition, nous distinguons deux cas qui s'excluent mutuellement.

1°) Les fonctions $f_n(z)$ ($n \geq n_0$) ne s'annulent pas dans le cercle $|z| < \frac{1}{4}$. Dans ce cas la démonstration peut se faire comme dans le cas 1°) du théorème 1.

2°) Il existe une suite partielle $\{f_{n_l}(z)\}$ et des points z_{n_l} en nombre fini ou infini dans le cercle $|z| < \frac{1}{4}$ tels que l'on ait $f_{n_l}(z_{n_l}) = 0$ ($l = 1, 2, \dots$). En remarquant que $m_1 > k$, on a en même temps $f'_{n_l}(z_{n_l}) = 0, f''_{n_l}(z_{n_l}) = 0, \dots, f^{(k)}_{n_l}(z_{n_l}) = 0$.

Pour chaque l fixe, traçons la circonférence $|z - z_{n_l}| = \frac{1}{2}$, et on a

$$\left(|z| \leq \frac{1}{4}\right) \subset \left(|z - z_{n_l}| \leq \frac{1}{2}\right) \subset \left(|z| \leq \frac{3}{4}\right).$$

Prenons sur la circonférence $|z - z_{n_l}| = \frac{1}{2}$ le point ou un des points ζ en lequel le module de la fonction $f_{n_l}(z)$ atteint son maximum et distinguons encore deux cas:

a) On a $|f_{n_l}^{(k)}(z)| < 1$ pour tout point du segment $\overline{z_{n_l}\zeta}$. En intégrant $f_{n_l}^{(k)}, f_{n_l}^{(k-1)}, \dots, f_{n_l}', f_{n_l}$ successivement le long de ce segment de z_{n_l} à un quelconque de ses points z ou à ζ , il vient

$$\begin{aligned} |f_{n_l}^{(k-1)}(z)| &\leq |f_{n_l}^{(k-1)}(z_{n_l})| + \left| \int_{z_{n_l}}^z f_{n_l}^{(k)}(\tau) d\tau \right| < 1, \\ |f_{n_l}^{(k-2)}(z)| &\leq |f_{n_l}^{(k-2)}(z_{n_l})| + \left| \int_{z_{n_l}}^z f_{n_l}^{(k-1)}(\tau) d\tau \right| < 1, \\ &\dots\dots\dots \\ |f_{n_l}(\zeta)| &\leq |f_{n_l}(z_{n_l})| + \left| \int_{z_{n_l}}^\zeta f_{n_l}'(\tau) d\tau \right| < 1. \end{aligned} \tag{36}$$

b) Il existe sur $\overline{z_{n_l}\zeta}$ un ou plusieurs points en lesquels $|f_{n_l}^{(k)}(z)| \geq 1$. Soit z'_{n_l} ce point ou celui de ces points qui est le plus près de z_{n_l} . Par intégrations de $f_{n_l}^{(k)}, \dots, f_{n_l}'$ successivement le long du segment $\overline{z_{n_l}z'_{n_l}}$ de z_{n_l} à z ou à z'_{n_l} , on trouve

$$\begin{aligned} |f_{n_l}^{(k-1)}(z)| < 1, & \quad |f_{n_l}^{(k-2)}(z)| < 1, \\ & \dots\dots\dots |f_{n_l}(z'_{n_l})| < 1. \end{aligned}$$

Lorsque, pour tout point du segment $\overline{z'_{n_l}\zeta}$, on a $|f_{n_l}^{(k+1)}(z)| < 1$, nous intégrons $f_{n_l}^{(k+1)}, \dots, f_{n_l}'$ successivement le long de ce segment de z'_{n_l} à un quelconque de ses points z ou à ζ , et nous trouvons

$$\begin{aligned} |f_{n_l}^{(k)}(z)| &\leq |f_{n_l}^{(k)}(z'_{n_l})| + \left| \int_{z'_{n_l}}^z f_{n_l}^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| < 2, \\ |f_{n_l}^{(k-1)}(z)| &\leq |f_{n_l}^{(k-1)}(z'_{n_l})| + \left| \int_{z'_{n_l}}^z f_{n_l}^{(k)}(\tau) d\tau \right| < 3, \\ &\dots\dots\dots \\ |f_{n_l}(\zeta)| &< k + 2. \end{aligned} \tag{37}$$

Dans le cas contraire, il existe sur $\overline{z'_{n_l}\zeta}$ un point z''_{n_l} en lequel $|f_{n_l}^{(k+1)}(z''_{n_l})| = 1$ et en un autre point quelconque z du segment $\overline{z'_{n_l}z''_{n_l}}$, $|f_{n_l}^{(k+1)}(z)| < 1$. Par intégrations de $f_{n_l}^{(k+1)}, \dots, f_{n_l}'$ successivement le long du segment $\overline{z'_{n_l}z''_{n_l}}$ de z'_{n_l} à z ou à z''_{n_l} , on a

$$\begin{aligned} |f_{n_l}^{(k)}(z)| &\leq |f_{n_l}^{(k)}(z'_{n_l})| + \left| \int_{z'_{n_l}}^z f_{n_l}^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| < 2, \\ |f_{n_l}^{(k-1)}(z)| &< 3, \dots, |f_{n_l}(z''_{n_l})| < k + 2 \end{aligned}$$

et

$$|f_{n_l}^{(k)}(z''_{n_l})| \geq |f_{n_l}^{(k)}(z'_{n_l})| - \left| \int_{z'_{n_l}}^{z''_{n_l}} f_{n_l}^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

En désignant par η_i la longueur du segment $\overline{z''_{n_i} \zeta}$, la fonction $f_{n_i}(z)$ satisfait donc aux conditions¹⁾ du théorème 8 dans le cercle $|z - z''_{n_i}| < \frac{1}{4} + \eta_i$ (qui est renfermé par le cercle unité). Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} \log M\left(|z| < \frac{1}{4}, f_{n_i}\right) &\leq \log |f_{n_i}(\zeta)| = \log M(|z - z''_{n_i}| \leq \eta_i, f_{n_i}) \leq \\ &\leq 4C \left\{ \log^+ |f_{n_i}(z''_{n_i})| + \log^+ |f_{n_i}^{(k)}(z''_{n_i})| + \log^+ \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^k |f_{n_i}^{(k)}(z''_{n_i})|} + \right. \\ &\quad \left. + \log^+ \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} |f_{n_i}^{(k+1)}(z''_{n_i})|} + \log 8 \right\} < C(k). \end{aligned} \quad (38)$$

Donc dans le cas 2°), les fonctions $f_{n_i}(z)$ sont bornées pour $|z| < \frac{1}{4}$, *a fortiori* pour $|z| < \frac{1}{16}$ et le théorème est complètement établi.

12. Le critère 9 comprend bien des résultats connus ou nouveaux.

(A) Pour $p = 2, q = 0; m_1 = m_2 = \infty$, la condition (35) est vérifiée évidemment. Dans ce cas, chaque fonction de la famille envisagée a deux valeurs lacunaires, et le théorème 9 devient le critère classique de M. P. Montel^[1].

(B) Pour $p = 2, q = 0; m_i (i = 1, 2)$ sont deux entiers positifs et la condition (35) se réduit à la forme

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} < 1. \quad (39)$$

C'est-à-dire, chaque fonction de la famille envisagée a deux valeurs multiples d'ordre m_1 et m_2 respectivement avec la condition (39) et le théorème 9 contient le critère de M. P. Montel^[1] qui a été énoncé dans l'introduction.

(C) Lorsque p est un entier positif quelconque et $q = 0$, la condition (35) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 1. \quad (40)$$

Dans ce cas, chaque fonction de la famille envisagée a un groupe de valeurs multiples d'ordre $m_i (i = 1, \dots, p)$ respectivement avec la condition (40), et le théorème 9 devient le critère, déjà trouvé par M. Yang Lo^[9].

1) Dans ce cas, il suffit de considérer $m_i > k (i = 1, \dots, p)$ au lieu de $q > \frac{kq+1}{m_i} (i = 1, \dots, p)$.

En effet, lorsque $q \geq 2$ ou $m_i \geq k+2 (i = 1, \dots, p)$, on a $q(m_i - k) > 1$. C'est-à-dire que $q > \frac{kq+1}{m_i}$. Lorsque $q = 1$, la première inégalité du (35) ne peut pas être vérifiée pour $p = 1$ et $m_1 = k+1$ ou $p = 2$ et $m_1 = m_2 = 2$; et pour $p = 2$ et un des m_i supérieur à 3 ou $p > 3$, la normalité de la famille peut être démontrée immédiatement sans intervention des dérivées dans les conditions.

(D) Pour $p = 1$, $q = 1$; $m_1 = \infty$, $n_1 = \infty$, la condition (35) est vérifiée. C'est-à-dire, chaque fonction de la famille envisagée a une valeur lacunaire et dont la $k^{\text{ième}}$ dérivée a une valeur lacunaire non nulle, et le théorème 9 devient le critère bien connu de Montel-Miranda^[8].

(E) Lorsque $p = 1$, $q = 1$; $m_1 = \infty$, $n_1 \geq 2$, la condition (35) est également vérifiée. Dans ce cas, chaque fonction de la famille envisagée a une valeur lacunaire et dont la $k^{\text{ième}}$ dérivée a une valeur multiple, et le théorème 9 devient le critère dû à MM. Hiong et Ho^[7].

(F) Enfin lorsque $p = 1$, $q = 1$, la condition (35) se réduit à la forme

$$\frac{k+1}{m_1} + \frac{1}{n_1} < 1.$$

C'est le théorème 1' du present travail.

Mais à part tous ces résultats, le théorème 9 contient encore des critères nouveaux comme les suivants:

Théorème 9'. Une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) où tous les zéros de $f - a$ ont un ordre de multiplicité $\geq m$ et ceux de $f^{(k)} - b_j$ ($j = 1, \dots, q$) ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$ avec la condition

$$\frac{kq+1}{m} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} < q, \quad (41)$$

est normale dans ce domaine, pourvu que a soit le nombre fini et b_j ($j = 1, \dots, q$) soient les q nombres finis non nuls et distincts entre eux; m et n_j ($j = 1, \dots, q$) soient les $q+1$ entiers positifs supérieurs ou égaux à deux.

Théorème 9''. Une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) où tous les zéros de $f - a_i$ ($i = 1, 2$) ont un ordre de multiplicité ≥ 2 et ceux de $f' - b_j$ ($j = 1, \dots, q$) ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$ avec la condition

$$\sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) > 1, \quad (42)$$

est normale dans ce domaine, pourvu que a_i ($i = 1, 2$) et b_j ($j = 1, \dots, q$) soient deux groupes de nombres finis et distincts entre eux dans chaque groupe (b_j différents de zéro); et que n_j ($j = 1, \dots, q$) soient les q entiers positifs supérieurs ou égaux à deux.

VI. CYCLE CORRESPONDANT AU CRITÈRE 9

13. D'abord, comme théorème de limitation nous avons le suivant:

Théorème 10. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et soient a_i, b_j, m_i et n_j ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$) des nombres qui ont les significations précédentes et qui vérifient la condition (35). Si tous les zéros de $f - a_i$ ($i = 1, \dots, p$) ont un ordre de multiplicité $\geq m_i$ et ceux de $f^{(k)} - b_j$ ($j = 1, \dots, q$) ont un ordre de multiplicité $\geq n_j$, alors on a pour $0 < r < 1$ l'inégalité

$$\log M(r, f) < \frac{C(k)}{1-r} \left\{ \log^+ |f(0)| + \log \frac{2}{1-r} \right\}, \quad (43)$$

où $C(k)$ est une constante ne dépendant que de a_i, b_j à part de k .

Démonstration: Lorsque $q=0$, la condition (35) se réduit à la forme $\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 1$.

D'après le théorème 1 de l'article [9], l'inégalité (43) est donc démontrée.
 Dans le cas $q \geq 1$, nous pouvons supposer que $a_1 = 0$ (Dans le cas contraire, il suffit de considérer $f - a_1$ au lieu de f).

Observons d'abord que dans le cercle $|z| < \frac{1}{8}$, le module de la fonction $f(z)$ a une borne supérieure qui ne dépend que de $\log^+ |f(0)|$. En effet, si f ne s'annule pas dans le cercle $|z| < \frac{1}{4}$, nous avons d'après l'inégalité (7) du n°2 que

$$\log M\left(\frac{1}{8}, f\right) \leq C(\log^+ |f(0)| + 1);$$

dans le cas contraire, comme le cas 2°) de la démonstration du théorème 9, on trouve

$$\log M\left(\frac{1}{4}, f\right) \leq C.$$

Au moyen de l'inégalité de Cauchy

$$|f^{(i)}(0)| \leq \frac{M(R, f)}{R^i},$$

il vient

$$\log^+ |f^{(i)}(0)| \leq C_0(\log^+ |f(0)| + 1) \quad (i = 1, \dots, k) \quad (44)$$

avec $C_0 > 1$.

Prenons sur la circonférence $|z| = r$ ($0 < r < 1$) le point ou un des points ζ en lequel le module de la fonction f atteint son maximum et distinguons deux cas:

1°) On a $|f^{(k)}(z)| < e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}$ pour tout point du rayon $\overline{o\zeta}$. En intégrant successivement $f^{(k)}, f^{(k-1)}, \dots, f'$ le long de ce rayon de l'origine à un quelconque de ses points, il vient

$$\begin{aligned} |f^{(k-1)}(z)| &\leq |f^{(k-1)}(0)| + \left| \int_{0z}^z f^{(k)}(\tau) d\tau \right| \leq 2e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}, \\ |f^{(k-2)}(z)| &\leq |f^{(k-2)}(0)| + \left| \int_{0z}^z f^{(k-1)}(\tau) d\tau \right| \leq 3e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ |f(\zeta)| &\leq (k+1)e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}. \end{aligned}$$

En particulier, on trouve

$$\log M(r, f) \leq C(\log^+ |f(0)| + 1). \quad (45)$$

2°) Il existe au moins sur $\overline{o\zeta}$ un point où $|f^{(k)}(z)| \geq e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}$. Soit z' ce point ou celui de ces points qui est le plus près de l'origine. Comme le cas 1°), nous avons, pour un point quelconque du segment $\overline{o z'}$,

$$\begin{aligned} |f^{(i)}(z)| &\leq (k+1-i)e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}, \quad (i = 1, \dots, k-1) \\ |f(z')| &\leq (k+1)e^{C_0(\log^+ |f(0)| + 1)}. \end{aligned}$$

Distinguons encore deux cas:

a) On a $|f^{(k+1)}(z)| < 1$ pour tout point du segment $\overline{z'\zeta}$. Dans ce cas, nous trouvons aisément

$$\begin{aligned}
 |f^{(k)}(z)| &\leq |f^{(k)}(z')| + \left| \int_{\overline{z'z}} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| \leq e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)} + 1 \leq 2e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)}, \\
 |f^{(k-1)}(z)| &\leq |f^{(k-1)}(z')| + \left| \int_{\overline{z'z}} f^{(k)}(\tau) d\tau \right| \leq 4e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 |f(\zeta)| &\leq |f(z')| + \left| \int_{\overline{z'\zeta}} f'(\tau) d\tau \right| \leq \left\{ 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\} e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

b) Il existe sur $\overline{z'\zeta}$ un ou plusieurs points où $|f^{(k+1)}(z)| \geq 1$. Soit z'' ce point ou celui de ces points qui est le plus près de z' et soit η la longueur du segment $\overline{z''\zeta}$.

Observons que

$$\begin{aligned}
 |f^{(k)}(z'')| &\leq |f^{(k)}(z')| + \left| \int_{\overline{z'z''}} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| \leq 2e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)} \\
 |f^{(k)}(z'')| &\geq |f^{(k)}(z')| - \left| \int_{\overline{z'z''}} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| \geq e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)} - 1 > 1, \\
 |f(z'')| &\leq \sum_{i=0}^k |f^{(i)}(z')| + \left| \int_{\overline{z'z''}} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| \leq \left\{ 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\} e^{C_0(\log^+ |f(0)|+1)}.
 \end{aligned}$$

La fonction $f(z)$ satisfait aux conditions du théorème 8 dans le cercle $|z - z''| < \eta + (1 - r)$ (qui est renfermé par le cercle unité).

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned}
 \log M(r, f) &= \log |f(\zeta)| = \log M(|z - z''| \leq \eta, f) \leq \\
 &\leq \frac{C}{1-r} \left\{ \log^+ |f(z'')| + \log^+ |f^{(k)}(z'')| + \log^+ \frac{1}{(1-r)^k |f^{(k)}(z'')|} + \right. \\
 &\quad \left. + \log^+ \frac{1}{(1-r)^{k+1} |f^{(k+1)}(z'')|} + \log \frac{2}{1-r} \right\} < \\
 &< \frac{C}{1-r} \left(\log^+ |f(0)| + \log \frac{2}{1-r} \right). \quad (47)
 \end{aligned}$$

14. Nous avons ensuite le théorème suivant qui étend celui de Landau.

Théorème 11. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine, y admettant le développement

$$f(z) = C_0 + C_1 z + \dots \quad (C_1 \neq 0); \quad (48)$$

et soient a_i, b_j, m_i et $n_j (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q)$ des nombres qui ont les significations précédentes et qui vérifient la condition (35). Si f admet $a_i (i = 1, \dots, p)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m_i$ et sa $k^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(k)}$ admet $b_j (j = 1, \dots, q)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq n_j$, alors il existe un nombre $R = R(C_0, C_1, k)$ qui ne dépend que de C_0, C_1 , à part de k , tel que: en désignant par (Γ) un cercle de centre O et de rayon R , une des deux circonstances suivantes se présente nécessairement:

1°) La fonction f cesse d'être holomorphe dans (Γ) ,

2°) Dans (Γ) f n'admet pas un a_i comme valeur multiple d'ordre $\geq m_i$ ou $f^{(k)}$ n'admet pas un b_i comme valeur multiple d'ordre $\geq n_i$.

Supposons que f soit holomorphe dans (Γ) , qu'elle y admette a_i comme valeur multiple d'ordre $\geq m_i$ et $f^{(k)}$ y admette b_i comme valeur multiple d'ordre $\geq n_i$. En posant $z = Rz_1$, et

$$f_1(z_1) = f(Rz_1) = C_0 + C_1 Rz_1 + \dots,$$

la fonction $f_1(z_1)$ est holomorphe pour $|z_1| < 1$, et satisfait aux conditions du théorème 10, alors

$$\log M\left(\frac{1}{2}, f_1\right) < \frac{C(k)}{\frac{1}{2}} (\log^+ |C_0| + \log 4).$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy donne

$$|f_1'(0)| \leq \frac{M\left(\frac{1}{2}, f_1\right)}{\frac{1}{2}}.$$

Donc on a

$$R \leq \frac{2e^{2C(k)(\log^+ |C_0| + \log 4)}}{|C_1|}. \quad (49)$$

DEUXIÈME PARTIE

VII. DÉMONSTRATION DU CRITÈRE DE BLOCH ET DE VALIRON

15. En ce qui concerne la normalité des familles de fonctions méromorphes à des valeurs multiples, A. Bloch et G. Valiron ont l'un après l'autre énoncé sans démonstration un critère de normalité. Maintenant, nous allons donner ici une démonstration élémentaire. D'abord on a le

Lemme 2. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R (< \infty)$ admettant p nombres distincts $a_i (i = 1, \dots, p)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m_i$ ($m_i \geq 2; i = 1, \dots, p$). Si l'inégalité

$$\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2 \quad (50)$$

est vérifiée, alors, en supposant que $f(0) \neq 0, \infty; f'(0) \neq 0$, on a pour $0 < r < R$

$$T(r, f) < \alpha \left(\log^+ |f(0)| + \log^+ \frac{1}{R|f'(0)|} \right) + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log \frac{2R}{R-r}, \quad (51)$$

où α, β et γ sont des constantes et δ est au plus égal à la plus petite des distances sphériques des points $a_1, \dots, a_p, \infty$ pris deux à deux.

On peut supposer avec une transformation homographique que $a_1 = 0$ et $a_p = \infty$. Appliquons à la fonction f et aux nombres a_i ($i = 1, \dots, p$) la seconde inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna

$$(p-2)T(r, f) < \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r, f)$$

avec

$$S(r, f) = \sum_{i=1}^{p-1} \log |f(0) - a_i| + \sum_{i=1}^{p-1} m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right) + \log \frac{1}{|f'(0)|} + A \log \frac{1}{\delta} + B,$$

et remarquons que

$$N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq \frac{1}{m_i} \left\{ T(r, f) + \log^+ |a_i| + \log 2 + \log \frac{1}{|f(0) - a_i|} \right\}.$$

($i = 1, \dots, p$)

Pour limiter la somme $\sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right)$, nous pouvons lui appliquer le lemme de M. R. Nevanlinna. Puis en utilisant le lemme de Bureau à l'inégalité ainsi obtenue, on trouvera le résultat à démontrer.

Théorème 12. Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet un groupe de nombres distincts a_i ($i = 1, \dots, p$) comme valeurs multiples d'ordre $\geq m_i$ avec la condition $\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2$, est normale dans ce domaine.

Démonstration: En prenant un nombre positif σ ($\sigma < 1$), on ramène comme le théorème 1 la proposition à la suivante:

Une famille de fonctions méromorphes dans le cercle unité où chaque fonction satisfait aux conditions du théorème, est normale dans le cercle C_σ : $|z| < \sigma$.

Etant donnée une fonction quelconque $f(z)$ de la famille envisagée, nous distinguons deux cas qui s'excluent mutuellement:

1°) On a $|f(z)| > 1$ pour tout point du cercle C_σ .

2°) Il existe au moins un point z' dans le cercle C_σ tel que $|f(z')| < 1$. Si l'inégalité $|f'(z)| < 1$ est vérifiée pour tout point du cercle C_σ , nous avons pour un point quelconque de ce cercle

$$|f(z)| \leq |f(z')| + \left| \int_{z'}^z f'(\tau) d\tau \right| < 2. \quad (52)$$

Dans le cas contraire, il existe un ou plusieurs points dans le cercle C_σ tels que $|f'(z)| \geq 1$. Soit z'' ce point ou celui de ces points qui est le plus près de z' (z'' peut être égal à z'), on a

$$|f(z'')| \leq |f(z')| + \left| \int_{z'}^{z''} f'(\tau) d\tau \right| < 2.$$

La fonction $f(z)$ satisfait aux conditions du lemme 2 dans le cercle $|z - z''| < R$ ($R = 1 - \sigma$). Nous trouvons ainsi¹⁾

$$T(r, z'', f) < \alpha + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log \frac{2R}{R-r}; \quad (0 < r < R)$$

en particulier, on a

$$T\left(\frac{R}{2}, z'', f\right) < \log C_0$$

avec

$$\log C_0 = \alpha + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log 4, \quad C_0 > 1.$$

En remarquant que $f(z'') \neq \infty$, nous avons, pour un pôle quelconque b de $f(z)$ dans le cercle $|z - z''| < \frac{R}{2}$,

$$\log \frac{\frac{R}{2}}{|b - z''|} \leq N\left(\frac{R}{2}, z'', f\right) \leq T\left(\frac{R}{2}, z'', f\right) < \log C_0. \quad (53)$$

Il vient

$$|b - z''| > \frac{R}{2C_0}.$$

C'est-à-dire, $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z - z''| \leq 4\sigma$, en prenant $\sigma = \frac{1}{8C_0 + 1}$.

Comme $C_0 > 1$, on a $4\sigma \leq \frac{R}{2}$ et par suite

$$T(4\sigma, z'', f) < \log C_0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log M(C_\sigma, f) &\leq \log M(|z - z''| \leq 2\sigma, f) \leq \\ &\leq \frac{4\sigma + 2\sigma}{4\sigma - 2\sigma} T(4\sigma, z'', f) \leq 3 \log C_0. \end{aligned} \quad (54)$$

Les deux cas précédents nous permettent de conclure que la famille envisagée est normale dans le cercle fixe C_σ ($\sigma = \frac{1}{8C_0 + 1}$) et le théorème est démontré.

16. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité où elle satisfait aux conditions du théorème 12 et ne se réduit pas à une constante. Dans le cercle $C_{\frac{\sigma}{10}}$: $|z| < \frac{\sigma}{10}$ ($\sigma = \frac{1}{8C_0 + 1}$), il existe au moins un point z_0 tel que $f(z_0) \neq 0, \infty$. Si l'on a $|f(z)| > 1$ pour tout point du C_σ , il vient

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, \frac{1}{f}\right) = 0,$$

1) Comme d'habitude, nous désignons par $T(\rho, z'', f)$ la fonction caractéristique de $f(z)$ pour le cercle $|z - z''| < \rho$ et par $N(\rho, z'', f)$ l'indice de densité des pôles de $f(z)$ pour le même cercle.

et

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right) = \log |f(z_0)|.$$

Dans le cas contraire, nous pouvons obtenir par la démonstration du théorème précédent

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right) < C,$$

où C est une constante numérique. On trouve ainsi, pour $0 < r < \frac{9}{10}\sigma$

$$T(r, z_0, f) < \log^+ |f(z_0)| + C. \tag{55}$$

Observons que le cercle $|z| \leq \frac{\sigma}{2}$ est renfermé par le cercle $|z - z_0| \leq \frac{6}{10}\sigma$. Nous avons, pour un nombre quelconque X ,

$$\begin{aligned} n\left(\frac{\sigma}{2}, f = X\right) &\leq n\left(\frac{6}{10}\sigma, z_0, f = X\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\log \frac{6}{10}\sigma} \int_{\frac{6}{10}\sigma}^{\frac{8}{10}\sigma} \frac{n(t, z_0, f = X)}{t} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\log \frac{4}{3}} \left\{ T\left(\frac{8}{10}\sigma, z_0, f\right) + \log^+ |X| + \log \frac{1}{|f(z_0) - X|} + \log 2 \right\} < \\ &< A + B \log^+ \frac{1}{|f(z_0), X|}. \end{aligned} \tag{56}$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le plan ouvert où elle satisfait à la condition

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, \varphi)}{(\log r)^2} = \infty; \tag{57}$$

G. Valiron^[4] a démontré qu'il existe une suite infinie de cercles de remplissage $C_j: |z - z_j| < \eta_j |z_j|$ ($j = 1, 2, \dots$), tels que, dans C_j , $\varphi(z)$ prend n_j fois au moins toutes les valeurs représentées à l'extérieur de deux cercles de rayon ε_j ; $\varepsilon_j, \eta_j, \frac{1}{n_j}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{j}$.

Dans les cercles $C'_j: |z - z_j| < \frac{2}{\sigma} \eta_j |z_j|$ ($j = 1, 2, \dots$), nous allons démontrer que la fonction $\varphi(z)$ ne peut pas admettre p nombres distincts a_i ($i = 1, \dots, p$) comme valeurs multiples d'ordre $\geq m_i$ avec la condition $\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2$.

En effet, supposons que cette conclusion ne soit pas vraie. Posons $\zeta = \frac{z - z_j}{\frac{2}{\sigma} \eta_j z_j}$ et $\Phi(\zeta) = \varphi\left(\frac{2}{\sigma} \eta_j z_j \zeta + z_j\right)$ pour chaque j fixe. Dans le cercle $|\zeta| < 1$, on a d'après le raisonnement précédent

$$n\left(\frac{\sigma}{2}, \Phi = X\right) < A + B \log^+ \frac{1}{|\Phi(z_0), X|}.$$

En outre,

$$n\left(\frac{\sigma}{2}, \Phi = X\right) = n(C_j, \varphi = X) \geq n_j,$$

sauf deux cercles γ de rayon ε_j . En prenant j suffisamment grand, il existe $X_0 \notin \gamma$ et $|\Phi(z_0), X_0| > \frac{1}{2}$ et $A + B \log 2 < n_j$. Ce qui donne une contradiction.

Donc, on a le

Théorème 13. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le plan ouvert où elle satisfait à la condition (57); il existe au moins une direction (J') telle que dans un angle quelconque de bissectrice (J'), $\varphi(z)$ ne peut pas admettre un groupe de nombres distincts $a_i (i = 1, \dots, p)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m_i$ avec la condition

$$\sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2.$$

VIII. EXTENSION PAR L'INTERVENTION DES DÉRIVÉES

17. Ensuite, en introduisant des dérivées des fonctions envisagées, nous avons le

Théorème 14. Soit $\mathfrak{M}$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et p nombres distincts $a_i (i = 1, \dots, p)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m (\geq 1)$ et $\geq m_i (\geq 2)$ respectivement, et sa $k^{\text{ème}}$ dérivée admet $q (\geq 0)$ nombres distincts non nuls $b_j (j = 1, \dots, q)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq n_j (\geq 2)$. Si les inégalités

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^p \frac{kq+1}{m_i} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} + \frac{1}{m} \left(1 + k \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}\right) &< (p-1) \cdot \max(q, 1) + q \\ q > \frac{kq+1}{m_i} \quad (i = 1, \dots, p; \text{lorsque } q \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

sont vérifiées et $p \geq 2$ lorsque $m > 1$ et $p \geq 3$ lorsque $m = 1$, alors $\mathfrak{M}$ est une famille normale dans ce domaine.

Démonstration: Lorsque $q = 0$, la condition (58) peut s'écrire $\sum_{i=1}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2$

($a_{p+1} = \infty, m_{p+1} = m$); d'après le théorème 12, la conclusion est immédiate.

Lorsque $q \geq 1$, il suffit de prouver la proposition:

Une famille $\mathfrak{M}$ de fonctions méromorphes dans le cercle unité où chaque fonction satisfait aux conditions du théorème, est normale dans le cercle $C_\sigma: |z| < \sigma (0 < \sigma < 1)$.

Soit $f(z)$ une fonction quelconque de la famille $\mathfrak{M}$. Si $f(z)$ ne prend pas a_1 et a_2 dans C_σ , alors elle a deux valeurs lacunaires et une valeur multiple. D'après le théorème 12, la conclusion est immédiate. Dans le cas contraire, il existe un point z' dans C_σ tel que $f(z') = a_1$ ou a_2 . En vertu de ce que les ordres des zéros de $f - a_i$ sont supérieurs ou égaux à m_i , a fortiori, supérieurs à k , alors on a $f^{(i)}(z') = 0$ ($i = 1, \dots, k$).

Distinguons deux cas qui s'excluent mutuellement:

1°) On a $|f^{(k)}(z)| < 2$ pour tout point du cercle C_σ . Nous trouvons ainsi pour un point quelconque z de ce cercle,

$$|f^{(i)}(z)| \leq \left| \int_{z'z} f^{(i+1)}(\tau) d\tau \right| < 2 \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

et

$$|f(z)| \leq |f(z')| + \left| \int_{z'z} f'(\tau) d\tau \right| < C_1 + 2 \quad (59)$$

avec $C_1 = \max(|a_1|, |a_2|)$.

2°) Il existe un ou plusieurs points où $|f^{(k)}(z)| \geq 2$. Soit z'' ce point ou celui de ces points qui est le plus près de z' , on a

$$|f^{(i)}(z'')| < 2 \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

et

$$|f(z'')| < C_1 + 2.$$

Nous distinguons encore deux cas:

a) Si l'inégalité $|f^{(k+1)}(z)| < 1$ est vérifiée pour tout point du cercle C_σ , on peut obtenir

$$|f^{(i)}(z)| \leq |f^{(i)}(z'')| + \left| \int_{z''z} f^{(i+1)}(\tau) d\tau \right| < 2(k+1-i) + 1 \quad (i = 1, \dots, k)$$

et

$$|f(z)| \leq |f(z'')| + \left| \int_{z''z} f'(\tau) d\tau \right| < C_1 + 2k + 3. \quad (60)$$

b) Il existe un ou plusieurs points où $|f^{(k+1)}(z)| \geq 1$. Soit z''' ce point ou celui de ces points qui est le plus près de z'' (z''' peut être égal à z''), on a

$$|f^{(k)}(z''')| \leq |f^{(k)}(z'')| + \left| \int_{z''z'''} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| < 3,$$

$$|f^{(k)}(z''')| \geq |f^{(k)}(z'')| - \left| \int_{z''z'''} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| > 1$$

et

$$|f(z''')| < 2k + 3 + C_1.$$

Dans le cercle $|z - z'''| < R$ ($R = 1 - \sigma$), nous appliquons à la fonction $f(z)$ le théorème 6 et le lemme de Bureau; il vient

$$T\left(\frac{R}{2}, z''', f\right) < \alpha + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log 4,$$

où δ est au plus égal à la plus petite des distances sphériques de $a_i (i = 1, \dots, p), \infty$ pris deux à deux et à celle de $b_j (j = 1, \dots, q), 0, \infty$ pris deux à deux. Comme la démonstration du théorème 12, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z - z''| \leq 4\sigma \left(\sigma = \frac{1}{8C_0 + 1}, \log C_0 = \alpha + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log 4 \right)$, et

$$\log M(C_0, f) \leq \log M(|z - z''| \leq 2\sigma, f) \leq 3T(4\sigma, z'', f) \leq 3 \log C_0. \quad (61)$$

Donc, le théorème se trouve établi.

18. Nous allons mentionner quelques cas particuliers simples du théorème 14, qui ne peuvent pas se déduire des résultats antérieurs.

(A) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et deux nombres finis et distincts $a_i (i = 1, 2)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 et ≥ 3 , et sa dérivée $f'(z)$ admet un nombre fini non nul b comme valeur lacunaire, est normale dans ce domaine.

(B) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et deux nombres finis distincts $a_i (i = 1, 2)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 et ≥ 3 , et sa deuxième dérivée $f''(z)$ admet deux nombres finis non nuls et distincts $b_j (j = 1, 2)$ comme valeurs lacunaires, est normale dans ce domaine.

(C) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet trois nombres distincts (finis ou non) $a_i (i = 1, 2, 3)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 3 , et sa dérivée $f'(z)$ admet deux nombres finis non nuls et distincts $b_j (j = 1, 2)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 et ≥ 3 , est normale dans ce domaine.

(D) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet quatre nombres finis distincts $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 , et sa dérivée $f'(z)$ admet quatre nombres finis non nuls et distincts $b_j (j = 1, 2, 3, 4)$ comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 , est normale dans ce domaine.

Remarque. Dans les cas où $p = 1 (m > 1)$ et $p \leq 2 (m = 1)$, les critères analogues ne sont pas encore établis.

IX. AUTRES RÉSULTATS

19. Pour terminer, nous établissons un critère de normalité à l'aide d'une inégalité fondamentale de M. Hiong King-Lai^[2].

Théorème 15. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R (< 1)$, et soient $a_i (i = 1, \dots, p)$ et $b_j (j = 1, \dots, q)$ deux groupes de nombres finis non nuls et distincts entre eux dans chaque groupe. Si f admet ∞ et $a_i (i = 0, 1, \dots, p; a_0 = 0)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m (\geq 1)$ et $\geq m_i (i = 0, 1, \dots, p; m_i \geq 2)$ et sa dérivée f' admet b_j comme valeurs multiples d'ordre $\geq n_j (j = 1, \dots, q; n_j \geq 2)$, et si l'inégalité

$$\left. \begin{aligned} p + q &> \frac{q+2}{m_0} + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} + \frac{1}{m} \left(2 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} \right) && \text{(lorsque } q \geq 2) \\ p + 1 &> \frac{3}{m_0} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{m_i} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{m} \left(2 + \frac{1}{n_1} \right) && \text{(lorsque } q = 1) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ou

est vérifiée, alors, en supposant que $f(0) \neq 0, \infty$; $f'(0) \neq 0$; $f''(0) \neq 0$, on a pour $0 < r < R$

$$T(r, f) < \alpha \left(\log^+ |f(0)| + \log^+ \frac{1}{R|f'(0)|} + \log^+ \frac{1}{R^2|f''(0)|} \right) + \beta \log \frac{1}{\delta} + \gamma \log \frac{2R}{R-r}, \tag{63}$$

où α, β et γ sont des constantes, δ est au plus égal à la plus petite des distances sphériques de $a_i (i = 1, \dots, p), 0, \infty$ pris deux à deux et à celle de $b_j (j = 1, \dots, q), 0, \infty$ pris deux à deux.

En effet, suivant le raisonnement de M. Hiong^[2], nous pouvons trouver

$$(p + q)T(r, f) < 2\bar{N}(r, f) + (q + 1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f' - b_j}\right) - \left\{ qN\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) \right\} + S(r) \tag{64}$$

avec

$$S(r) = (q + 1) \log |f(0)| + \sum_{i=1}^p \log |f(0) - a_i| + \sum_{j=1}^q \log |f'(0) - b_j| + q \log \frac{1}{|f'(0)|} + \log \frac{1}{|f''(0)|} + (q + 2)m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + \sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f'}{f - a_i}\right) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{f''}{f' - b_j}\right) + A \log \frac{1}{\delta} + B.$$

Lorsque $q \geq 2$, si α est pour $f(z) - a_i$ un zéro multiple d'ordre $l \geq m_i$, il entre $q(l - 1) \geq m_i$ fois dans $qN\left(r, \frac{1}{f}\right)$. Ce qui montre que

$$(p + q)T(r, f) < 2\bar{N}(r, f) + q\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N^{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{j=1}^q \bar{N}\left(r, \frac{1}{f' - b_j}\right) + S(r).$$

On peut trouver de la même façon que pour le théorème 6

$$\left\{ p + q - \frac{q + 2}{m_0} - \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} - \frac{1}{m} \left(2 + \sum_{i=1}^q \frac{1}{n_i} \right) \right\} T(r, f) < S_1(r),$$

où

$$S_1(r) = \left(q + 1 - \frac{q + 2}{m_0} \right) \log |f(0)| + \sum_{i=1}^p \log |f(0) - a_i| + \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \log |f'(0) - b_j| + q \log \frac{1}{|f'(0)|} + \log \frac{1}{|f''(0)|} + \left(q + 2 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j} \right) m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + \sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f'}{f - a_i}\right) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{f''}{f' - b_j}\right) + A \log \frac{1}{\delta} + B.$$

En majorant le reste, nous pouvons obtenir l'inégalité (63).

Lorsque $q = 1$, de (64), on a

$$(p+1)T(r, f) < 2N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N^2\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\ + \sum_{i=1}^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b_1}\right) + S(r).$$

Il vient

$$\left\{p+1 - \frac{3}{m_0} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{m_i} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{m} \left(2 + \frac{1}{n_1}\right)\right\} T(r, f) < S_2(r)$$

avec

$$S_2(r) = \left(2 - \frac{3}{m_0}\right) \log |f(0)| + \sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \log |f(0) - a_i| + \\ + \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \log |f'(0) - b_1| + \log \frac{1}{|f'(0)|} + \log \frac{1}{|f''(0)|} + \\ + \left(3 + \frac{1}{n_1}\right) m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + \sum_{i=1}^p m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right) + \\ + m\left(r, \frac{f''}{f-b_1}\right) + A \log \frac{1}{\delta} + B.$$

Nous obtenons encore l'inégalité (63).

Le théorème précédent nous permet d'établir le critère suivant:

Théorème 16. Soit $\mathfrak{M}$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et p nombres finis et distincts $a_i (i = 1, \dots, p)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq m (\geq 1)$ et $\geq m_i (\geq 2)$ respectivement, et sa dérivée $f'(z)$ admet q nombres finis non nuls et distincts $b_j (j = 1, \dots, q)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq n_j (\geq 2)$. Si l'inégalité

$$\left. \begin{aligned} p+q-1 &> \frac{q+2}{m_1} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{n_i} + \frac{1}{m} \left(2 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{n_j}\right) \quad (\text{lorsque } q \geq 2) \\ \text{ou} \\ p &> \frac{3}{m_1} + \sum_{i=2}^p \frac{1}{m_i} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{m} \left(2 + \frac{1}{n_1}\right) \quad (\text{lorsque } q = 1) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

est vérifiée, alors la famille $\mathfrak{M}$ est normale dans le domaine (D).

20. Nous signalons ici deux cas particuliers du théorème 16, lesquels ne peuvent être obtenus du théorème 14.

(A) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et deux nombres finis distincts $a_i (i = 1, 2)$ comme valeurs multiples d'ordre $\geq 3, \geq 2$ et ≥ 4 respectivement, et sa dérivée $f'(z)$ admet un nombre fini non nul b comme valeur lacunaire, est normale dans ce domaine.

(B) Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) où chaque fonction $f(z)$ admet ∞ et un nombre fini a_1 comme valeurs multiples d'ordre ≥ 2 et admet

un autre nombre fini a_2 comme valeur lacunaire, et sa dérivée $f'(z)$ admet un nombre fini non nul b comme valeur multiple d'ordre ≥ 4 , est normal dans ce domaine.

Il est naturel de se demander: Est-il possible de considérer $f^{(k)}(z)$ ($k \geq 2$) au lieu de $f'(z)$? Ce remplacement nous introduit une difficulté et la question est encore à résoudre.

En partant du théorème 14 et du théorème 16, nous pouvons obtenir quelques directions du type de Julia pour une fonction méromorphe dans le plan ouvert qui satisfait à la condition (57).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Montel, P. 1927 Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, *Collect. Borel*, Paris.
- [2] Hiong, King-lai (熊庆来) 1958 Sur les fonctions méromorphes en rapport avec leurs dérivées, *Sci. Sin.*, 7(7), 661—685.
- [3] Hiong, King-lai (熊庆来) 1958 Sur le cycle de Montel-Miranda dans la théorie des familles normales, *Sci. Sin.*, 7(10), 987—1000.
- [4] Valiron G. 1938 Directions de Borel des fonctions méromorphes, *Mém. Sci. Math.*, Fasc. 89, Paris.
- [5] Chuang, Chi-tai (庄圻泰) 1957 Un théorème général sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité et ses applications (I), (II), *Sci. Sin.*, 6(4), 569—621; (5), 757—831.
- [6] Milloux, H. 1946 Les dérivées des fonctions méromorphes et la théorie des défauts, *Ann. École Norm. Sup.*, 3^e série, 63, 289—316.
- [7] Hiong, King-lai (熊庆来) et Ho, Yu-tsaim (何育贇) 1961 Sur les valeurs multiples des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, *Sci. Sin.*, 10(3), 267—285.
- [8] Miranda C. 1935 Sur un nouveau critère de normalité pour les familles des fonctions holomorphes, *Bull. Sci. Math. Fr.*, 63, 185—196.
- [9] Yang, Lo (杨乐) 1964 Sur les valeurs quasi-exceptionnelles des fonctions holomorphes, *Sci. Sin.*, 13(6), 879—885.