Vol. XVIII No. 1 SCIENTIA SINICA Jan.-Feb. 1975

RECHERCHES SUR LE NOMBRE DES VALEURS DEFICIENTES ET LE NOMBRE DES DIRECTIONS DE BOREL DES FONCTIONS MÉROMORPHES

YANG LO (杨 乐) ET CHANG KUAN-HEO (张广厚)

(*Institut de Mathématiques, Academia Sinica*)

Reçu le 22, janvier 1974.

RÉSUMÉ

Principalement sont établies les propositions:

(1) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert. Si l'on désigne par p le nombre des valeurs déficientes de $f(z)$, et par q le nombre des directions de Borel de $f(z)$, alors on a $p \leqslant q$.*

(2) *Si l'on conserve les hypothèses du (1), et suppose que $\rho > \frac{p}{2}$, alors on a $p \leqslant q-1$.*

INTRODUCTION

Depuis que R. Nevanlinna a introduit la notion de valeur déficiente dans la théorie des fonctions méromorphes, se pose alors la question d'obtenir une limite supérieure du nombre des valeurs déficientes d'une fonction méromorphe en l'assujettissant à certaines conditions. Et celle-ci, abordée par R. Nevanlinna[10], a été étudiée déjà par divers auteurs (voir [6] [8] [9]).

A. Pfluger[12] a établi d'abord la proposition: Si le défaut total d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ (supposé fini) est égal à deux, alors $f(z)$ a $\rho+1$ valeurs déficientes au plus. Puis, G. Valiron[14] a montré qu'une fonction méromorphe d'ordre nul a une valeur déficiente au plus. Mais A. A. Goldberg[7] a trouvé un exemple de fonction méromorphe d'ordre fini qui a une infinité de valeurs déficientes. Ainsi on n'en peut pas limiter le nombre des valeurs déficientes au moyen de l'ordre.

Plus tard, A. Edrei et W. H. J. Fuchs[4-5] ont étudié le nombre des valeurs déficientes de certaines classes spéciales de fonctions méromorphes. Puis, N. U. Arakelyan[1] a démontré qu'il existé, pour tout nombre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$, une fonction entière d'ordre ρ qui a une infinité de valeurs déficientes. Récemment de nouveaux résultats[3,11,15] ont été obtenus. En particulier, A. Weitsman[15] a étendu aux fonctions méromorphes le théorème cité de A. Pfluger. Notre but principal dans ce travail est de montrer que, pour une fonction méromorphe d'ordre fini positif, le nombre de ses valeurs déficientes ne dépasse pas certaines limites supérieures où figure le nombre de ses directions de Borel. L'intérêt de ce résultat est ce que la notion de valeur déficiente et celle de direction de Borel sont en apparence tout à fait différentes. Nous trouvons aussi quelques résultats sur la distribution des directions de Borel d'une fonction méromorphe d'ordre fini positif et sur sa croissance.

Nous présentons ici nos remerciements à M. Chuang Chi-tai, qui a lu le manuscrit de ce mémoire et nous a bien aidé de ses précieux conseils.

I. Lemmes Preliminaires

Nous énonçons d'abord les lemmes suivants dont la démonstration sera donnée plus tard.

Lemme 1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ $(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert et soient a_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ p $(1 \leqslant p < +\infty)$ nombres complexes distincts. On suppose que $\delta(a_\mu, f) = \delta_\mu > 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$. Si $\rho(r)$ est un ordre précisé de $f(z)$ et $U(r) = r^{\rho(r)}$, alors il existe une suite de nombres positifs $R_n(n = 1, 2, \cdots)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty$, jouissant de la propriété suivante: Pour chaque n suffisamment grand, en désignant par $E_{n\mu}(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ l'ensemble des valeurs $\omega(0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles*

$$\begin{cases} \log \dfrac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} > \dfrac{\delta}{2^{p+4}} U(R_n) & \text{lorsque } a_\mu \neq \infty, \\ \log |f(R_n e^{i\omega})| > \dfrac{\delta}{2^{p+4}} U(R_n) & \text{lorsque } a_\mu = \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $\delta = \min\limits_{1\leqslant\mu\leqslant p} \delta_\mu$, on a

$$\operatorname{mes} E_{n\mu} > K(\delta, p, \rho) > 0 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, p), \tag{1.2}$$

où $K(\delta, p, \rho)$ est une constante positive ne dépendant que de δ, p et ρ; on peut prendre

$$K(\delta, p, \rho) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 28\, pe}{\log \dfrac{4}{3}}\right)4^{+\rho 2}}. \tag{1.3}$$

Lemme 2. *Soit $g(\zeta)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|\zeta| \leqslant R(< +\infty)$. Si l'on pose*

$$\mathfrak{N} = n(R, g = 0) + n(R, g = 1) + n(R, g = \infty),$$

et suppose que $d(> 0)$ soit égal à la plus petite des distances de l'origine O à l'un quelconque des points où $g(\zeta) = 0, 1$ ou ∞, alors on a pour $0 < r < R$ l'inégalité

$$T(r, g) < \frac{CR\mathfrak{N}}{R - r}\left\{\log \frac{R\mathfrak{N}}{d} + \log^+ R + \log^+ \frac{1}{R} + \log \frac{2R}{R - r}\right\} + \log^+ |g(0)|, \tag{1.4}$$

où C est une constante numérique.

Pour la démonstration voir [16, 468—470].

Lemme 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert et soient B_1: $\arg z = \omega_1$, B_2: $\arg z = \omega_2$, $0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 \leqslant 2\pi + \omega_1$ (en particulier, B_2 peut être $\arg z = 2\pi + \omega_1$) deux demi-droites issues de l'origine telles qu'il n'existe pas de direction de Borel de $f(z)$ dans le secteur $\omega_1 < \arg z < \omega_2$. Supposons qu'il existe une suite de nombres positifs $R_n(n = 1, 2, \cdots)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty$, et une valeur complexe (finie ou non) a_0 telle que, pour tout nombre positif quelconque ε, en désignant par E_n l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_1 < \omega < \omega_2)$ pour lesquelles*

$$\begin{cases} \log \dfrac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_0|} > R_n^{\rho-\varepsilon} & si\ a_0 \neq \infty, \\ \log |f(R_n e^{i\omega})| > R_n^{\rho-\varepsilon} & si\ a_0 = \infty, \end{cases} \tag{1.5}$$

on ait mes $E_n > K_1 > 0$, *pourvu que* n *soit suffisamment grand, où* K_1 *ne dépend pas de* ε. *Dans ces conditions, étant donnés un nombre positif* K_2 *et un nombre positif suffisamment petit* α, *on peut trouver une suite de courbes* L_n *satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. L_n *est située dans la région* $\omega_1 + 8\alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - 8\alpha$, $R_n - 1 \leqslant |z| \leqslant R_n$. *Les points extrêmes de* L_n *sont* $R_n e^{i(\omega_1 + \alpha_n')}$ *et* $R_n e^{i(\omega_2 - \alpha_n')}(8\alpha \leqslant \alpha_n' \leqslant 9\alpha)$. *En désignant par* A_n *l'arc* $\{R_n e^{i\omega} | \omega_1 < \omega < \omega_2\}$, *la mesure de l'ensemble des valeurs* ω *pour lesquelles* $R_n e^{i\omega} \in A_n - L_n$, *est inférieur à* K_2.

2. *Pour chaque* η *positif, pourvu que* n *soit assez grand, on a sur* L_n *l'inégalité*

$$\begin{cases} \log \dfrac{1}{|f(z) - a_0|} > R_n^{\rho-\eta} & lorsque\ a_0 \neq \infty, \\ \log |f(z)| > R_n^{\rho-\eta} & lorsque\ a_0 = \infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

Lemme 4. *Sous les hypothèses du lemme 3, on a* $\omega_2 - \omega_1 \leqslant \dfrac{\pi}{\rho}$.

II. Théorèmes Principaux

Théorème 1. *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $\rho(0 < \rho < +\infty)$ *dans le plan ouvert. Si l'on désigne par* p *le nombre des valeurs déficientes de* $f(z)$, *et par* q *le nombre des directions de Borel de* $f(z)$, *alors on a* $p \leqslant q$.

Démonstration. On sait, d'après un resultat classique de G. Valiron[13, p. 32], qu'une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ possède au moins une direction de Borel, par suite $q \geqslant 1$.

Lorsque $q = +\infty$, la conclusion du théorème est immédiate.

Lorsque $1 \leqslant q < +\infty$, supposons que p soit supérieur ou égal à $q + 1$. Nous allons montrer que cette hypothèse entraîne donc une contradiction.

Prenons $q + 1$ valeurs $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q+1)$ déficientes de $f(z)$ telles que $\delta(a_\mu, f) = \delta_\mu > 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, q+1)$ et posons $\delta = \min\limits_{1 \leqslant \mu \leqslant q+1} \delta_\mu$. Désignons par B_m: $\arg z = \omega_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_q < 2\pi;\ \omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1)$ les directions de Borel de $f(z)$.

Il nous est loisible de supposer que $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ soient finies. En effet, dans le cas contraire, nous envisageons la fonction $\dfrac{1}{f(z) - c}$ au lieu de $f(z)$, où c est une valeur non déficiente de $f(z)$. Le nombre des valeurs déficientes de $f(z)$ et le nombre de celles de $\dfrac{1}{f(z) - c}$ sont égaux. Le nombre des directions de Borel de $f(z)$ et le nombre de celles de $\dfrac{1}{f(z) - c}$ sont aussi égaux. Mais les valeurs déficientes de $\dfrac{1}{f(z) - c}$ sont finies.

En appliquant le lemme 1 à la fonction $f(z)$ et aux $q+1$ valeurs déficientes a_μ, on trouve une suite de nombres positifs $R_n (n = 1, 2, \cdots)$ avec $\lim_{n\to+\infty} R_n = +\infty$ telle que, pour chaque n suffisamment grand, en designant par $E_{n\mu}(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ l'ensemble des valeurs $\omega(0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles

$$\log \frac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} > \frac{\delta}{2^{\rho+4}} U(R_n) \quad (\mu = 1, 2, \cdots, q+1), \tag{2.1}$$

on a

$$\operatorname{mes} E_{n\mu} > K(\delta, q+1, \rho) \quad (\mu = 1, 2, \cdots, q+1), \tag{2.2}$$

où

$$K(\delta, q+1, \rho) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 28(q+1)e}{\log \dfrac{4}{3}}\right)4^{\rho+2}}.$$

Donc, on peut conclure que pour l'un des q secteurs $\omega_m < \arg z < \omega_{m+1}$ $(m = 1, 2, \cdots, q)$, soit G_1: $\omega_{m_1} < \arg z < \omega_{m_1+1}$ et une suite partielle R_{n1} de R_n, la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_{m_1} < \omega < \omega_{m_1+1})$ pour lesquelles

$$\log \frac{1}{|f(R_{n1} e^{i\omega}) - a_1|} > R_{n1}^{\rho-\varepsilon} \tag{2.3}$$

soit supérieur à $\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$ pour tout nombre positif ε, pourvu que n soit suffisamment grand.

Pour la fonction $f(z)$, sa valeur déficiente a_1, ses directions de Borel B_{m_1}: $\arg z = \omega_{m_1}$ et B_{m_1+1}: $\arg z = \omega_{m_1+1}$, la suite de nombres positifs R_{n1}, et les constantes positives $K_1 = K_2 = \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$, on y peut appliquer le lemme 3. Par conséquent, étant donné un nombre positif suffisamment petit α, on peut trouver une suite de courbes $L_{n1}^{(1)}$ telle que, en désignant par $A_{n1}^{(1)}$ l'arc $\{R_{n1}e^{i\omega} | \omega_{m_1} < \omega < \omega_{m_1+1}\}$, on ait $\operatorname{mes}\{\omega | R_{n1}e^{i\omega} \in A_{n1}^{(1)} - L_{n1}^{(1)}\} < \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$ et pour chaque η positif, on a sur L_n l'inégalité

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_1|} > R_{n1}^{\rho-\eta}, \tag{2.4}$$

pourvu que n soit suffisamment grand.

En posant $d = \min_{1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant q+1} |a_\mu - a_\nu|$, on a pour n suffisamment grand, $\max(e^{-R_{n1}^{\rho-\varepsilon}}, e^{-R_{n1}^{\rho-\eta}}) < \frac{d}{2}$. On peut conclure qu'un point quelconque de $L_{n1}^{(1)}$ ne satisfait pas à une des inégalités

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} > R_{n1}^{\rho-\varepsilon}, \quad (\nu = 2, 3, \cdots, q+1). \tag{2.5}$$

En effet, si (2.5) est vérifiée en un point z de $L_{n1}^{(1)}$ et pour une valeur $a_{\nu_0}(2 \leqslant \nu_0 \leqslant q+1)$, en considérant (2.4), on trouve

$$d \leqslant |a_1 - a_{\nu_0}| \leqslant |a_1 - f(z)| + |f(z) - a_{\nu_0}| < e^{-R_{n1}^{\rho-\eta}} + e^{-R_{n1}^{\rho-\varepsilon}} < d.$$

Dans le secteur G_1, les points $z = R_{n1}e^{i\omega}$ pour lesquels

$$\log \frac{1}{|f(R_{n1}e^{i\omega}) - a_2|} > R_{n1}^{\rho-\varepsilon} \tag{2.6}$$

doivent appartenir à l'ensemble $A_{n1}^{(1)} - L_{n1}^{(1)}$. Par suite, la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_1 < \omega < \omega_2)$ pour lesquelles l'inégalité (2.6) a lieu, est inférieur à $\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$.

Comme R_{n1} est une suite partielle de R_n, d'après (2.1) et (2.2), la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles l'inégalité (2.6) a lieu, est supérieur à $K(\delta, q+1, \rho)$. On peut donc conclure que pour l'un des $q-1$ secteurs $\omega_m < \arg z < \omega_{m+1}$ $(m = 1, 2, \cdots, m_1 - 1, m_1 + 1, \cdots, q)$, soit G_2: $\omega_{m_2} < \arg z < \omega_{m_2+1}$, et une suite partielle R_{n2} de R_{n1}, la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_{m_2} < \omega < \omega_{m_2+1})$ pour lesquelles

$$\log \frac{1}{|f(R_{n2}e^{i\omega}) - a_2|} > R_{n2}^{\rho-\varepsilon} \tag{2.7}$$

soit supérieur à $\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$ pour tout nombre positif ε, pourvu que n soit suffisamment grand.

Pour la fonction $f(z)$, sa valeur déficiente a_2, ses directions de Borel B_{m_2}: $\arg z = \omega_{m_2}$, B_{m_2+1}: $\arg z = \omega_{m_2+1}$, la suite de nombres positifs R_{n2}, et les constantes positives $K_1 = K_2 = \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$, on peut appliquer le lemme 3. Par conséquent, étant donné $\alpha > 0$, on peut trouver une suite de $L_{n2}^{(2)}$ telle que, en désignant par $A_{n2}^{(2)}$ l'arc $\{R_{n2}e^{i\omega} | \omega_{m_2} < \omega < \omega_{m_2+1}\}$, on ait mes $\{\omega | R_{n2}e^{i\omega} \in A_{n2}^{(2)} - L_{n2}^{(2)}\} < \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$, et pour chaque η positif, on a sur $L_{n2}^{(2)}$ l'inégalité

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_2|} > R_{n2}^{\rho-\eta}, \tag{2.8}$$

pourvu que n soit suffisamment grand.

Comme on dit plus haut, un point quelconque z de $L_{n2}^{(2)}$ ne satisfait pas à une des inégalités

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} > R_{n2}^{\rho-\varepsilon}, \quad (\nu = 1, 3, 4, \cdots, q+1). \tag{2.9}$$

Dans les secteurs $G_\mu(\mu = 1, 2)$, les points $z = R_{n2}e^{i\omega}$ pour lesquels

$$\log \frac{1}{|f(R_{n2}e^{i\omega}) - a_3|} > R_{n2}^{\rho-\varepsilon} \tag{2.10}$$

doivent appartenir aux ensembles $A_{n2}^{(\mu)} - L_{n2}^{(\mu)}$. Par suite, la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_{m_\mu} < \omega < \omega_{m_\mu+1})$ pour lesquelles l'inégalité (2.10) a lieu, est inférieur à $\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$ $(\mu = 1, 2)$. Puisque R_{n2} est une suite partielle de R_n, d'après

(2.1) et (2.2), la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles l'inégalité (2.10) a lieu, doit être supérieur à $K(\delta, q+1, \rho)$. Donc l'un des $q-2$ secteurs $\omega_m < \arg z < \omega_{m+1}$ $(m \neq m_1, m_2)$, soit G_3: $\omega_{m_3} < \arg z < \omega_{m_3+1}$, a des propriétés analogues.

Nous pouvons procéder de proche en proche comme ce qui précède, et conclure que, correspondant aux q valeurs déficientes $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$, il existe q secteurs G_μ: $\omega_{m_\mu} < \arg z < \omega_{m_\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, q)$, sans partie commune deux à deux, et q suites de nombres positifs $R_{n\mu}(\mu = 1, 2, \cdots, q;\ n = 1, 2, \cdots)$, où chaque $R_{n\mu+1}(\mu = 1, 2, \cdots, q-1)$ est une suite partielle de $R_{n\mu}$; dans chaque secteur G_μ, on peut trouver une suite de courbes $L_{n\mu}^{(\mu)}$ telle que, en désignant par $A_{n\mu}^{(\mu)}$ l'arc $\{R_{n\mu}e^{i\omega} | \omega_{m_\mu} < \omega < \omega_{m_\mu+1}\}$, on ait

$$\text{mes}\,\{\omega | R_{n\mu}e^{i\omega} \in A_{n\mu}^{(\mu)} - L_{n\mu}^{(\mu)}\} < \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho), \tag{2.11}$$

et pour chaque η positif, on a sur $L_{n\mu}^{(\mu)}$ l'inégalité

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} > R_{n\mu}^{\rho-\eta}, \tag{2.12}$$

pourvu que n soit suffisamment grand. De plus, un point quelconque de $L_{n\mu}^{(\mu)}$ ne satisfait pas à une des inégalités

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} > R_{n\mu}^{\rho-\varepsilon} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, \mu-1, \mu+1, \cdots, q+1). \tag{2.13}$$

Dans chaque secteur $G_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$, les points $R_{n\mu}e^{i\omega}$ pour lesquels

$$\log \frac{1}{|f(R_{nq}e^{i\omega}) - a_{q+1}|} > R_{nq}^{\rho-\varepsilon} \tag{2.14}$$

doivent appartenir aux ensembles $A_{nq}^{(\mu)} - L_{nq}^{(\mu)}$. Ceci montre que la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_{m_\mu} < \omega < \omega_{m_\mu+1})$ pour lesquelles l'inégalité (2.14) a lieu, est inférieur à $\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \rho)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, q)$.

Mais le plan ouvert est décomposé en q secteurs $G_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ par les q directions de Borel $B_m(m = 1, 2, \cdots, q)$, et il en résulte que la mesure de l'ensemble des valeurs $\omega(0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles l'inégalité (2.14) a lieu, est inférieur à $K(\delta, q+1, \rho)$.

D'autre part, comme R_{nq} est une suite partielle de R_n, d'après (2.1) et (2.2), la mesure en question est supérieure à $K(\delta, q+1, \rho)$, et on en arrive à une contradiction. Le théorème se trouve donc démontré.

Voici quelques compléments au théorème 1.

Théorème 2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert. On désigne par p le nombre des valeurs déficientes de $f(z)$, et par q le nombre des directions de Borel de $f(z)$. Si $\rho > \frac{p}{2}$, alors on a $p \leqslant q-1$.*

Démonstration: Lorsque $q = +\infty$, la conclusion du théorème est immédiate.

Lorsque $q < +\infty$, supposons que $p > q-1$, et montrons que cette hypothèse entraîne une contradiction. Prenons q valeurs déficientes $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ de $f(z)$

telles que $\delta(a_\mu, f) = \delta_\mu > 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, q)$, et posons $\delta = \min_{1 \leqslant \mu \leqslant q} \delta_\mu$. Désignons par B_m: $\arg z = \omega_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_q < 2\pi;\ \omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1)$ les directions de Borel de $f(z)$. En appliquant le lemme 4, nous pouvons trouver, comme dans la démonstration du théorème 1, q secteurs G_μ: $\omega_{m_\mu} < \arg z < \omega_{m_\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ n'ayant pas de partie commune deux à deux, tels que

$$\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu} \leqslant \frac{\pi}{\rho}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, q).$$

Par suite,

$$\sum_{\mu=1}^{q} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) \leqslant q\frac{\pi}{\rho} \leqslant p\frac{\pi}{\rho} < 2\pi. \tag{2.15}$$

Mais, le plan ouvert est décomposé en q secteurs $G_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ par les q directions de Borel $B_m(m = 1, 2, \cdots, q)$, et l'on a

$$\sum_{\mu=1}^{q} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) = 2\pi. \tag{2.16}$$

Cette contradiction montre que $p \leqslant q - 1$.

Théorème 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert. On désigne par p le nombre des valeurs déficientes de $f(z)$, et par q (supposé fini) le nombre des directions de Borel de $f(z)$. Ces directions de Borel étant B_m: $\arg z = \omega_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_q < 2\pi;\ \omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1)$, s'il existe un entier l, $1 \leqslant l \leqslant q$, tel que*

$$\rho > \max_{1 \leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_l \leqslant q} \frac{l\pi}{\sum_{\mu=1}^{l}(\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu})}, \tag{2.17}$$

alors on a $p \leqslant l - 1$.

Démonstration. Supposons que $p > l - 1$, et prenons l valeurs déficientes $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, l)$ de $f(z)$ telles que $\delta(a_\mu, f) = \delta_\mu > 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, l)$. En appliquant le lemme 4, on peut trouver, comme dans la démonstration du théorème 1, l secteurs G_μ: $\omega_{m_\mu} < \arg z < \omega_{m_\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, l)$, n'ayant pas de partie commune deux à deux, tels que

$$\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu} \leqslant \frac{\pi}{\rho}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, l).$$

Il vient

$$\sum_{\mu=1}^{l} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) \leqslant \frac{l\pi}{\rho}. \tag{2.18}$$

D'où

$$\rho \leqslant \frac{l\pi}{\sum_{\mu=1}^{l} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu})},$$

ce qui est impossible d'après l'hypothèse (2.17).

III. Autres Resultats

Pour la distribution des directions de Borel des fonctions méromorphes, on a le

Théorème 4. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(0 < \rho < +\infty)$ dans le plan ouvert, admettant $p(\geqslant 1)$ nombres complexes distincts comme valeurs déficientes. Alors:*

1° *Si le nombre q des directions de Borel de $f(z)$ est supérieur à p, il existe p couples de directions de Borel B_{m_μ}: $\arg z = \omega_{m_\mu}$ et $B_{m_\mu+1}$: $\arg z = \omega_{m_\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p;\ 1 \leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_p \leqslant q)$ telles que $\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu} \leqslant \frac{\pi}{\rho}$;*

2° *Si le nombre q des directions de Borel de $f(z)$ est égal à p, on a $\rho \leqslant \frac{p}{2}$. En particulier, lorsque $\rho = \frac{p}{2}$, l'ouverture du secteur quelconque limité par deux directions successives de Borel est égal à $\frac{\pi}{\rho}$.*

Démonstration. Si $q = +\infty$, il existe, pour ε positif quelconque, p couples de directions de Borel, dont les angles aigus sont inférieur à ε. Dans ce cas, la conclusion du théorème est évidente.

Si $q < +\infty$, d'après le théorème 1 on a $p \leqslant q$. En appliquant le lemme 4, on peut trouver, comme dans la démonstration du théorème 1, p secteurs G_μ: $\omega_{m_\mu} < \arg z < \omega_{m_\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$, n'ayant pas de partie commune deux à deux, tels que

$$\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu} \leqslant \frac{\pi}{\rho}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, p). \tag{3.1}$$

Lorsque $q \geqslant p + 1$, la conclusion du théorème est immédiate.

Lorsque $q = p$, comme $\left(\bigcup_{\mu=1}^{p} G_\mu\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{q} B_m\right)$ couvre le plan ouvert, on a

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) = 2\pi.$$

D'autre part, on a d'après l'inégalité (3.1)

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) \leqslant p\, \frac{\pi}{\rho}. \tag{3.2}$$

Il en resulte donc $\rho \leqslant \frac{p}{2}$.

Si $q = p$ et $\rho = \frac{p}{2}$, on a

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu}) = p\, \frac{\pi}{\rho}. \tag{3.3}$$

La comparaison des inégalités (3.1) et (3.3) donne

$$\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu} = \frac{\pi}{\rho}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, p).$$

Le théorème 4 est une généralisation d'un résultat antérieur[16].

Pour la croissance des fonctions méromorphes, on a le

Théorème 5. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan ouvert, admettant $p(1 \leqslant p < +\infty)$ nombres complexes distincts comme valeurs déficientes. On désigne par G l'ensemble obtenu en supprimant du plan ouvert $q(p \leqslant q < +\infty)$ demi-droites $\arg z = \omega_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_q < 2\pi)$, et par G_r la partie de G appartenant au cercle $|z| \leqslant r$. S'il existe trois nombres complexes distincts $c_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ tels que*

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log\left(\sum_{\nu=1}^{3} n(G_r, f = c_\nu)\right)}{\log r} \leqslant \lambda, \tag{3.4}$$

où

$$\lambda = \max_{1 \leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_p \leqslant q} \frac{p\pi}{\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu})} \qquad (\omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1), \tag{3.5}$$

alors l'ordre ρ de $f(z)$ est fini, et $\rho \leqslant \lambda$.

Démonstration. Si $p = 1$, la démonstration du théorème est analogue à celle d'un résultat anterieur[16, 479—482].

Si $p > 1$, on voit d'abord, en considérant une valeur déficiente, que l'ordre ρ de $f(z)$ est fini. Supposons que

$$\rho > \lambda = \max_{1 \leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_p \leqslant q} \frac{p\pi}{\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu})}. \tag{3.6}$$

D'après (3.4), il n'existe pas de direction de Borel de $f(z)$ dans G. Le nombre q_1 des directions de Borel de $f(z)$ est inférieur ou égal à q, et les directions $\arg z = \omega'_m(m = 1, 2, \cdots, q_1)$ de Borel de $f(z)$ sont parmi les demi-droites $\arg z = \omega_m(m = 1, 2, \cdots, q)$. En vertu de (3.6), c'est alors distinctement que[1)]

$$\rho > \max_{1 \leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_p \leqslant q_1} \frac{p\pi}{\sum_{\mu=1}^{p} (\omega'_{m_\mu+1} - \omega'_{m_\mu})}. \tag{3.7}$$

En appliquant à la fonction $f(z)$ et à l'entier $l = p$ le théorème 3, il vient $p \leqslant l - 1 = p - 1$. Cette contradiction montre que $\rho \leqslant \lambda$.

Corollaire. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan ouvert, admettant $p(1 \leqslant p < +\infty)$ valeurs complexes distincts comme valeurs déficientes. S'il existe trois nombres complexes distincts $c_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ tels que les racines des équations $f(z) = c_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ sont situées sur $q(p \leqslant q < +\infty)$ demi-droites $\arg z = \omega_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_q < 2\pi)$, sauf au plus des racines en nombre fini, alors l'ordre ρ de $f(z)$ est fini, et*

1) On a d'aprés le théorème 1, $p \leqslant q_1$.

$$\rho \leqslant \max_{1\leqslant m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_p \leqslant q} \frac{p\pi}{\sum_{\mu=1}^{p} (\omega_{m_\mu+1} - \omega_{m_\mu})}, \quad (\omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1).$$

Ce corollaire est une généralisation d'un théorème de A. Edrei[2].

IV. Démonstration du Lemme 1.

D'après la définition[13, p. 24] de $\rho(r)$, nous pouvons trouver une suite de nombres positifs $r_n (n = 1, 2, \cdots)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$, tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T(r_n, f)}{U(r_n)} = 1$.

Pour chaque n fixe, on pose $\zeta = \dfrac{z}{3r_n}$, et[1)]

$$g_\mu(\zeta) = \frac{1}{f(3r_n\zeta) - a_\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, p).$$

Dans le cercle $|\zeta| < 1$, en appliquant aux pôles $b_{\nu\mu}(\nu = 1, 2, \cdots, n(1, g_\mu = \infty))$ de la fonction $g_\mu(\zeta)$ le théorème de Boutroux-Cartan[13, p. 10], on a

$$\prod_{\nu=1}^{n(1, g_\mu=\infty)} |\zeta - b_{\nu\mu}| > \left(\frac{h}{p}\right)^{n(1,\, g_\mu=\infty)}, \tag{4.1}$$

pourvu que l'on supprime $n(1, g_\mu = \infty)$ cercles $(\gamma)_\mu$ au plus dont la somme des rayons est au plus $\dfrac{2eh}{p}$. On prend $h = \dfrac{1}{14e}$ et désigne par (γ) les cercles supprimés $\bigcup\limits_{\mu=1}^{p} (\gamma)_\mu$.

Dans l'anneau $\dfrac{1}{3} \leqslant |\zeta| \leqslant \dfrac{2}{3}$, il existe une circonférence $|\zeta| = R_0$, qui ne coupe pas les cercles (γ). Pour un point quelconque ζ de cette circonférence, on a

$$\begin{aligned}\log|g_\mu(\zeta)| &\leqslant \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|g_\mu(e^{i\theta})|\,d\theta + \sum_{\nu=1}^{n(1, g_\mu=\infty)} \log\left|\frac{1 - \bar{b}_{\nu\mu}\zeta}{\zeta - b_{\nu\mu}}\right| \\ &\leqslant 5m(1, g_\mu) + n(1, g_\mu = \infty)\log\frac{2p}{h}.\end{aligned}$$

Il existe donc une circonférence $|z| = R_n (R_n = 3r_nR_0,\ r_n \leqslant R_n \leqslant 2r_n)$ sur laquelle on a

$$\log\frac{1}{|f(z) - a_\mu|} \leqslant 5m\left(3r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) + n(3r_n,\, f = a_\mu)\log\frac{2p}{h}.$$

En remarquant que

1) Dans le cas où $a_\mu = \infty$, on introduit $f(3r_n\zeta)$ au lieu de $\dfrac{1}{f(3r_n\zeta) - a_\mu}$.

$$n(3r_n, f = a_\mu) \leqslant \frac{1}{\log \frac{4}{3}} N\left(4r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right),$$

on obtient l'inégalité

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} \leqslant KT\left(4r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) \tag{4.2}$$

avec $K = 5 + \dfrac{\log 28\, pe}{\log \frac{4}{3}}$.

Nous désignons par $E^*_{n\mu}$ l'ensemble des valeurs $\omega (0 \leqslant \omega < 2\pi)$ pour lesquelles

$$\log^+ \frac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} > \frac{1}{2} m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right), \tag{4.3}$$

et par $CE^*_{n\mu}$ l'ensemble complémentaire de $E^*_{n\mu}$ par rapport à l'intervalle $0 \leqslant \omega < 2\pi$. On a

$$m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^*_{n\mu}} \log^+ \frac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} d\omega$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{CE^*_{n\mu}} \log^+ \frac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} d\omega \leqslant \frac{1}{2\pi} KT\left(4r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) \text{mes } E^*_{n\mu}$$
$$+ \frac{1}{2} m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right),$$

par suite

$$m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) \leqslant \frac{K}{\pi} T\left(4r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) \text{mes } E^*_{n\mu}. \tag{4.4}$$

Lorsque n est suffisamment grand, il vient d'après l'hypothèse $\delta(a_\mu, f) = \delta_\mu \geqslant \delta > 0$,

$$m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) > \frac{\delta_\mu}{2} T(R_n, f) \geqslant \frac{\delta_\mu}{2} T(r_n, f) > \frac{\delta}{4} U(r_n). \tag{4.5}$$

D'autre part, en utilisant les propriétés de $\rho(r)$, on trouve

$$T\left(4r_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) = T(4r_n, f - a_\mu) + \log \frac{1}{|f(0) - a_\mu|}$$
$$\leqslant T(4r_n, f) + \log^+ |a_\mu| + \log \frac{1}{|f(0) - a_\mu|} + \log 2$$
$$< 2U(4r_n) < 4^{\rho+1} U(r_n), \quad (n > n_0). \tag{4.6}$$

La comparaison des inégalités entre (4.4) (4.5) et (4.6) donne

$$\text{mes } E^*_{n\mu} > K(\delta, p, \rho) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 28\, pe}{\log \frac{4}{3}}\right) 4^{\rho+2}} > 0. \tag{4.7}$$

Pour une valeur quelconque ω de $E^*_{n\mu}$, on a

$$\log \frac{1}{|f(R_n e^{i\omega}) - a_\mu|} > \frac{1}{2} m\left(R_n, \frac{1}{f - a_\mu}\right) > \frac{\delta_\mu}{8} U(r_n) \geqslant \frac{\delta}{2^{\rho+4}} U(R_n), \quad (4.8)$$

il vient $E^*_{n\mu} \subset E_{n\mu}$. Le lemme se trouve donc démontré.

V. Demonstration du Lemme 3

Il nous est loisible de supposer que $a_0 = \infty$, dans le cas contraire, on considère la fonction $\dfrac{1}{f(z) - a_0}$.

On suppose que $0 < \alpha < \dfrac{1}{32} \min(K_1, K_2)$. En désignant par E'_n l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_1 + 8\alpha \leqslant \omega \leqslant \omega_2 - 8\alpha)$ pour lesquelles

$$\log |f(R_n e^{i\omega})| > R_n^{\rho-\varepsilon}, \quad (n > n_0), \quad (5.1)$$

on a $\operatorname{mes} E'_n > \dfrac{K_1}{2} (n > n_0)$.

Nous divisons le secteur G: $\omega_1 + 8\alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - 8\alpha$ en $N = \left[\dfrac{\pi}{\alpha}\right] + 1$ secteurs égaux $G_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, N)$. Leur ouverture commune ne dépasse pas 2α. Un de ces secteurs égaux, soit $G_{n\mu_0}$, est tel que, en désignant par $E_{n\mu_0}$ l'ensemble des valeurs $\omega(\omega_1 + 8\alpha \leqslant \omega \leqslant \omega_2 - 8\alpha, R_n e^{i\omega} \in G_{n\mu_0})$ pour lesquelles (5.1) a lieu, on ait

$$\operatorname{mes} E_{n\mu_0} \geqslant \frac{1}{2N} K_1 \geqslant \frac{\alpha}{2(\pi + \alpha)} K_1, \quad (n > n_0).$$

Puisqu'il n'existe pas de direction de Borel de $f(z)$ dans le secteur limité par les demi-droites B_1 et B_2, on peut donc trouver trois nombres complexes distincts $c_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ et $\lambda(0 < \lambda < \rho)$ tels que

$$\sum_{\nu=1}^{3} n\{(|z| \leqslant r) \cap (\omega_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha),\ f = c_\nu\} < r^\lambda. \quad (5.2)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_n = &\sum_{\nu=1}^{3} n\{(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_n) \cap (\omega_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha), f = c_\nu\} \\ &+ n\{(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_n) \cap (\omega_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha), f = \infty\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

et soit

$$h \leqslant \min\left\{\frac{K_2}{8}, \frac{\alpha}{8(\pi + \alpha)} K_1\right\} \leqslant \frac{1}{4} \operatorname{mes} E_{n\mu_0}. \quad (5.4)$$

Lorsque n est suffisamment grand, on a donc $\mathfrak{N}_n < R_n^{\rho+\varepsilon}$, si petit que soit le nombre positif ε.

Appelons $b_k(k = 1, 2, \cdots, \mathfrak{N}_n)$ les points où $f(z) = c_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ ou ∞ dans le domaine $(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_n) \cap (\omega_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha)$ et marquons les cercles

$|z-b_k| < \dfrac{h}{\mathfrak{N}_n+1}$ $(k = 1, 2, \cdots, \mathfrak{N}_n)$ dont l'ensemble est désigné par $(\gamma)_n$. Prenons l'arc $(|z| = R_n) \cap (\omega_1 + 8\alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - 8\alpha)$, et considérons les portions de cet arc, s'il y en a, qui appartiennent à certains des cercles $(\gamma)_n$. En remplaçant chacune de ces portions par l'arc du cercle correspondant situant dans $|z| \leqslant R_n$, nous obtenons pour chacun n une courbe L_n. Comme la somme des rayons des cercles supprimés est au plus égal à $h \leqslant \dfrac{\alpha}{4}$, il existe α'_n, $8\alpha \leqslant \alpha'_n \leqslant 9\alpha$, tel que les points extrêmes de L_n soient $R_n e^{i(\omega_1+\alpha'_n)}$ et $R_n e^{i(\omega_2-\alpha'_n)}$. Alors

$$\text{mes}\,\{\omega \,|\, R_n e^{i\omega} \in A_n - L_n\} < 2h + 18\alpha < K_2.$$

Pour établir la deuxième partie du lemme, désignons par s la bissectrice de $G_{n\mu_0}$, et par z_0 le point d'intersection de s et de $|z| = R_n$. Alors dans le cercle Γ_n: $|z - z_0| \leqslant \alpha R_n$, il existe un point z_1 sur L_n tel que

$$\log|f(z_1)| > R_n^{\rho-\varepsilon}. \tag{5.5}$$

Dans Γ_n, soit z_2 un point quelconque sur L_n, on a

$$\begin{aligned}\log|f(z_1)| &\leqslant \frac{3\alpha R_n + 2\alpha R_n}{3\alpha R_n - 2\alpha R_n}\, m(z_2, 3\alpha R_n, f) + \sum_\nu \log\left|\frac{(3\alpha R_n)^2 - \overline{(b_\nu - z_2)}(z_1 - z_2)}{3\alpha R_n(z_1 - b_\nu)}\right| \\ &\leqslant 5m(z_2, 3\alpha R_n, f) + n(z_2, 3\alpha R_n, f)\left\{\log\frac{\mathfrak{N}_n+1}{h} + \log 6\alpha R_n\right\} \\ &< C(\log R_n) T(z_2, 4\alpha R_n, f),\end{aligned}$$

où C est une constante numérique qui ne dépend que de ρ, α, K_1, K_2.

Le lemme 2 donne

$$\begin{aligned}T(z_2, 4\alpha R_n, f) &< T\left(z_2, 4\alpha R_n, \frac{f-c_1}{f-c_3}\cdot\frac{c_2-c_3}{c_2-c_1}\right) + \log|f(z_2) - c_3| + C \\ &< C\left(\sum_{\nu=1}^{3} n(z_2, 5\alpha R_n, f = c_\nu) + 1\right)\left\{\log\frac{(\mathfrak{N}_n+1)\left(\sum_{\nu=1}^{3} n(z_2, 5\alpha R_n, f = c_\nu) + 1\right)}{h}\right. \\ &\quad \left. + \log(5\alpha R_n) + 10\right\} + \log^+\left|\frac{f(z_2) - c_1}{f(z_2) - c_3}\right| + \log|f(z_2) - c_3| + C.\end{aligned}$$

Puis en tenant compte de ce que

$$\begin{aligned}n(z_2, 5\alpha R_n, f = c_\nu) \leqslant n\{|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_n) \cap (\omega_1 + \alpha \\ \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha), f = c_\nu\} < (1 + 6\alpha)^\lambda R_n^\lambda,\end{aligned}$$

on trouve

$$R_n^{\rho-\varepsilon} < \log|f(z_1)| < C(\log R_n)(R_n^\lambda \log R_n + 2\log^+|f(z_2)|). \tag{5.6}$$

Il vient

$$\log|f(z_2)| > R_n^{\rho-2\varepsilon}, \tag{5.7}$$

dès que n est assez grand.

Dans la région G, considérons le cercle Γ_n dont le centre est sur $|z| = R_n$. En faisant tourner le cercle Γ_n autour de l'origine, chaque fois d'une angle α, on obtient une chaîne de $2N$ cercles au plus qui couvrent L_n. Nous pouvons procéder de proche en proche comme ce qui précède, et concluons que, en un point quelconque z de L_n, pourvu que n soit assez grand, on a

$$\log |f(z)| > R_n^{\rho-(2N+1)\varepsilon} > R_n^{\rho-\eta}. \tag{5.8}$$

VI. Démonstration du Lemme 4

Il nous est loisible de supposer que $a_0 = \infty$ et $\omega_2 = -\omega_1 (\omega_2 > 0)$. Supposons que $\omega_2 - \omega_1 > \dfrac{\pi}{\rho}$. Nous allons montrer que cette hypothèse entraîne une contradiction.

Posons $\omega_2 - \alpha = \dfrac{k\pi}{2}$, α étant assez petit pour que $k\pi > \dfrac{\pi}{\rho}$. Prenons un point b tel que $1 < b < 2$ et $f(b) \neq \infty$, et faisons la transformation

$$\zeta = \frac{z^{\frac{1}{k}} - b^{\frac{1}{k}}}{z^{\frac{1}{k}} + b^{\frac{1}{k}}}, \tag{6.1}$$

qui représente le secteur $\omega_1 + \alpha < \arg z < \omega_2 - \alpha$ sur le cercle $|\zeta| < 1$, tandis que $f(z)$ se change en une fonction méromorphe $g(\zeta)$.

Soit z un point quelconque de la courbe L_n fournie par le lemme 3, et soit ζ l'image de z. On a donc

$$|\zeta| = \left| \frac{|z|^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\omega}{k}} - b^{\frac{1}{k}}}{|z|^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\omega}{k}} + b^{\frac{1}{k}}} \right| = \left\{ 1 - \frac{4|z|^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} \cos\frac{\omega}{k}}{|z|^{\frac{2}{k}} + 2|z|^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} \cos\frac{\omega}{k} + b^{\frac{2}{k}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

En remarquant que $|\omega| \leqslant \omega_2 - \alpha_n' \leqslant \omega_2 - 8\alpha = k\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{7}{k}\alpha\right)$, il vient

$$|\zeta| \leqslant \left\{ 1 - \frac{4|z|^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} \sin\frac{7}{k}\alpha}{(|z|^{\frac{1}{k}} + b^{\frac{1}{k}})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{ 1 - |z|^{-\frac{1}{k}} \sin\frac{7}{k}\alpha \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{2}|z|^{-\frac{1}{k}} \sin\frac{7}{k}\alpha \leqslant 1 - \frac{\sin\frac{7}{k}\alpha}{2} R_n^{-\frac{1}{k}}.$$

Posons

$$r_n = 1 - \frac{\sin\frac{7}{k}\alpha}{2} R_n^{-\frac{1}{k}}. \tag{6.2}$$

L'image l_n de L_n par la transformation (6.1) est située dans le cercle $|\zeta| \leqslant r_n$.

En vertu de ce qu'il n'existe pas de direction de Borel de $f(z)$ dans le secteur limité par les demi-droites B_1 et B_2, on peut trouver trois nombres complexes distincts $c_\nu (\nu = 1, 2, 3)$ et un nombre λ, $0 < \lambda < \rho$ tels que, pour R assez grand, en désignant par $D(R)$ la région $|z| \leqslant R$, $\omega_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \omega_2 - \alpha$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{3} n\{D(R), f = c_\nu\} < R^\lambda.$$

Dans ce qui suit, on suppose que $\frac{1}{k} < \mu < \rho$.

Puisque l'inverse de la transformation (6.1) est

$$z = b\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^k, \tag{6.3}$$

on a pour $|\zeta| \leqslant r$, $|z| \leqslant b\frac{2k}{(1-r)^k}$. Par suite,

$$\sum_{\nu=1}^{3} n(|\zeta| \leqslant r,\ g = c_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{3} n\left(D\left(b\,\frac{2^k}{(1-r)^k}\right),\ f = c_\nu\right)$$
$$< (2^k b)^\lambda \left(\frac{1}{1-r}\right)^{k\lambda}.$$

Ce qui donne *a fortiori*

$$\int_{r_0}^{1} \sum_{\nu=1}^{3} n(r, g = c_\nu)(1-r)^{k\lambda-1+\varepsilon}\ dr < +\infty,$$

si petit que soit le nombre positif ε.

Puisque $k\lambda > 1$, d'après l'égalité

$$(k\lambda - 1 + \varepsilon) \int_{r_0}^{r} \sum_{\nu=1}^{3} N(\tau, g = c_\nu)(1-\tau)^{k\lambda-2+\varepsilon} d\tau$$
$$= (1-r_0)^{k\lambda-1+\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{3} N(r_0, g = c_\nu) - (1-r)^{k\lambda-1+\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{3} N(r, g = c_\nu)$$
$$+ \int_{r_0}^{r} \sum_{\nu=1}^{3} n(\tau,\ g = c_\nu)(1-\tau)^{k\lambda-1+\varepsilon}\,\frac{d\tau}{\tau}, \tag{6.4}$$

il vient

$$\int_{r_0}^{1} \sum_{\nu=1}^{3} N(r, g = c_\nu)(1-r)^{k\lambda-2+\varepsilon} dr < +\infty.$$

Puis, la seconde inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna donne

$$\int_{r_0}^{1} T(r, g)(1-r)^{k\lambda-2+\varepsilon} dr < +\infty, \tag{6.5}$$

ce qui montre que l'ordre de $g(\zeta)$ dans le cercle $|\zeta| < 1$ ne dépasse pas $k\lambda - 1$.

D'autre part, posons

$$\mathfrak{N}_n = n\left(\frac{1+r_n}{2},\ g = \infty\right), \quad h_n = \frac{1-r_n}{4},$$

et marquons les cercles $(\gamma)_n$ d'exclusion de rayon commun $\dfrac{h_n}{\mathfrak{N}_n+1}$ relatifs aux pôles de $g(\zeta)$ dans le cercle $|\zeta|<\dfrac{1+r_n}{2}$. La somme totale des rayons est inférieure à h_n.

Il existe un point ζ_2, sur l_n et exterieur aux $(\gamma)_n$. En effet, si les images des points extrêmes $R_n e^{i(\omega_1+\alpha'_n)}$ et $R_n e^{i(\omega_2-\alpha'_n)}$ par la transformation (6.1) sont ζ_1, $\bar{\zeta}_1$, on a

$$
\begin{aligned}
|\zeta_1-\bar{\zeta}_1| &= \left|\frac{2R_n^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\left(e^{i\frac{\omega_2-\alpha'_n}{k}}-e^{i\frac{-\omega_2+\alpha'_n}{k}}\right)}{R_n^{\frac{2}{k}}+R_n^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\left(e^{i\frac{\omega_2-\alpha'_n}{k}}+e^{i\frac{-\omega_2+\alpha'_n}{k}}\right)+b^{\frac{2}{k}}}\right| \\
&\geqslant \frac{4R_n^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\cos\dfrac{8\alpha}{k}}{(R_n^{\frac{1}{k}}+b^{\frac{1}{k}})^2} \geqslant \frac{R_n^{-\frac{1}{k}}}{2} > 4h_n.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

La formule de Poisson-Jensen donne

$$
\begin{aligned}
\log|g(\zeta_2)| &\leqslant \frac{\dfrac{1+r_n}{2}+r_n}{\dfrac{1+r_n}{2}-r_n}\, m\left(\frac{1+r_n}{2}, g\right)+\sum_{\nu}\log\left|\frac{\left(\dfrac{1+r_n}{2}\right)^2-\bar{b}_\nu\zeta_2}{\dfrac{1+r_n}{2}(\zeta_2-b_\nu)}\right| \\
&\leqslant \frac{4}{1-r_n}\, m\left(\frac{1+r_n}{2}, g\right)+n\left(\frac{1+r_n}{2}, g=\infty\right)\log\frac{2(\mathfrak{N}_n+1)}{h_n}.
\end{aligned}
$$

De

$$
n\left(\frac{1+r_n}{2},\ g=\infty\right)<\frac{4}{1-r_n}N\left(\frac{3+r_n}{4},\ g=\infty\right)<\frac{4}{1-r_n}T\left(\frac{3+r_n}{4}, g\right),
$$

et de

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N}_n &\leqslant n\left\{\left(|z|\leqslant b\frac{4^k}{(1-r_n)^k}\right)\cap(\omega_1+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\omega_2-\alpha),\ f=\infty\right\} \\
&< \frac{1}{(1-r_n)^{k\rho+\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

on en déduit l'inégalité

$$
\log|g(\zeta_2)|<\frac{C}{1-r_n}\left(\log\frac{1}{1-r_n}\right)T\left(\frac{3+r_n}{4}, g\right), \tag{6.7}
$$

dès que n est assez grand.

Or

$$
\log|g(\zeta_2)|>R_n^{\rho-\eta}=\left(\frac{\sin\dfrac{7}{k}\alpha}{2(1-r_n)}\right)^{k(\rho-\eta)},
$$

par conséquent

$$
T\left(\frac{3+r_n}{4}, g\right)>C\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{k\rho-1-k\eta}\frac{1}{\log\dfrac{1}{1-r_n}}. \tag{6.8}
$$

Donc l'ordre de $g(\zeta)$ dans $|\zeta|<1$ est supérieur ou égal à $k\rho-1$.

On arrive finalement à l'inégalité $k\lambda - 1 \geqslant k\rho - 1$ et donc $\lambda \geqslant \rho$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse $\lambda < \rho$. L'angle aigu de B_1 et de B_2 est donc inférieur ou égal à $\frac{\pi}{\rho}$.

Index Bibliographique

[1] Аракелян, Н. У.: Челые функций конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, *ДАН СССР*, **170** (1966), 999—1002.

[2] Edrei, A.: Meromorphic functions with three radially distributed values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 276—293.

[3] Edrei, A.: Solution of the deficiency problem for functions of small lower order, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1973), 435—445.

[4] Edrei, A. & Fuchs, W. H. J.: Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1962), 317—344.

[5] Edrei A. & Fuchs, W. H. J.: On meromorphic functions with regions free of poles and zeros, *Acta Math.*, **108** (1962), 113—145.

[6] Fuchs, W. H. J.: Developments in the classical Nevanlinna theory of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 275—291.

[7] Гольдберг, А. А.: О дефектах мероморфных функций, *ДАН СССР*, **98** (1954), 893—895.

[8] Гольдберг, А. А. и Островский, И. В.: *Распределение значений мероморфных функций* (1970), Москва: «наука».

[9] Hayman, W. K.: *Meromorphic functions* (1964), New York: Oxford Univ. Press.

[10] Nevanlinna, R.: *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (1929), Paris: Gauthier-Villars.

[11] Oum, Ki-choul.: Bounds for the number of deficient values of entire functions whose zeros have angular densities, *Pacific J. Math.*, **29** (1969), 187—202.

[12] Pfluger, A.: Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher ordnung, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946), 91—104.

[13] Valiron, G.: *Directions de Borel des fonctions méromorphes*, *Mém. Sci. Math.*, Fasc. 89 (1938), Paris.

[14] Valiron, G.: Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950) 40—42.

[15] Weitsman, A.: Meromorphic functions with maximal deficiency sum and a conjecture of F. Nevanlinna, *Acta Math.*, **123** (1969), 115—139.

[16] Yang, Lo et Chang, Kuan-heo: Sur la distribution des directions de Borel des fonctions méromorphes, *Scientia Sinica*, **16** (1973), 465—482.