*Science Articles*

# SUR LA CONSTRUCTION DES FONCTIONS MÉROMORPHES AYANT DES DIRECTIONS SINGULIÈRES DONNÉES

YANG LO (杨 乐) ET CHANG KUAN-HEO (张广厚)

*(Institut de Mathématiques, Academia Sinica)*

Reçu le 20 octobre, 1975.

RÉSUMÉ

Le but principal de cet mémoire est l'établissement des théorèmes suivants:

(1) Étant donnés un ensemble $E$ fermé non-vide de nombres réels (mod $2\pi$) et un nombre $\rho$ fini positif, il existe une fonction méromorphe d'ordre $\rho$ dont les directions de Borel d'ordre $\rho$ sont précisément les demi-droites $\{\arg z = \theta \mid \theta \in E\}$.

(2) Soit $E$ un ensemble fermé non-vide de nombres réels (mod $2\pi$) et soit $\rho(\theta)$ une fonction semi-continue supérieurement dans $E$, $0 \leqslant \rho(\theta) \leqslant +\infty$. Il existe une fonction méromorphe d'ordre $\rho_0 = \max\limits_{\theta \in E} \rho(\theta)$ telle qu'elle admet toutes les demi-droites $\arg z = \theta$, $\theta \in E$ comme directions de Borel d'ordre $\rho(\theta)$ et qu'elle n'a aucune d'autre direction singulière.

On sait que[6], pour toute fonction méromorphe d'ordre fini positif $\rho$ dans le plan ouvert[1)], il existe au moins une direction $\arg z = \theta_0$ telle que, quelque petit que soit le nombre positif $\delta$,

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)}{\log r} = \rho$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$ sauf deux au plus. $n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)$ désigne le nombre des zéros de $f(z) - \alpha$ dans le domaine $(|z| \leqslant r) \cap (|\arg z - \theta_0| \leqslant \delta)$, chaque zéro étant compté avec son ordre de multipicité. (Si $\alpha = \infty$, il s'agit du nombre des pôles de $f(z)$.) Une telle direction est appelée une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$.

Il est évident que, si les demi-droites $\arg z = \theta_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ sont des directions de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n = \theta_0$, alors $\arg z = \theta_0$ est aussi une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$. Par suite, les directions de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$ forment un ensemble fermé non-vide de demi-droites issues de l'origine. Il est naturelle de poser la question suivante:

---

1) Dans la suite, pour une fonction méromorphe dans le plan ouvert, nous dirons simplement fonction méromorphe.

Étant donnés un ensemble $E$ fermé non-vide de demi-droites issues de l'origine et $\rho$ un nombre fini positif, existe-t-il une fonction méromorphe d'ordre $\rho$ dont les directions de Borel d'ordre $\rho$ sont précisément les demi-droites de l'ensemble $E$?

Dans le présent travail, nous allons donner une réponse positive à cette question (Théorème 1), et démontrer un résultat plus général (Théorème 2). Enfin nous donnerons une remarque sur une conjecture de J. M. Anderson et J. Clunie[1].

## I

D'abord nous allons démontrer deux lemmes.

**Lemme 1.** *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|z| \leqslant R$ $(0 < R < +\infty)$, et si $z$ est un point tel que $|z| = r < R$ et que les distances de $z$ à tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ sont supérieures à un nombre positif $d$, alors on a*

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \log^+ R + 3\log^+\frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f) + \log^+ m\left(R, \frac{1}{f}\right)$$
$$+ \log^+ n(R, 0) + \log^+ n(R, \infty) + \log^+\frac{1}{d} + 5\log 2. \tag{1.1}$$

En effet, la formule de Poisson-Jensen donne

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta$$
$$-\sum_j \log\frac{R^2-\bar{a}_j z}{R(z-a_j)} + \sum_k \log\frac{R^2-\bar{b}_k z}{R(z-b_k)} + iC,$$

les $a_j$ étant les zéros et les $b_k$ les pôles de $f(z)$ situés dans le cercle $|z| \leqslant R$.

En dérivant, on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}\,d\theta$$
$$+\sum_j \left(\frac{\bar{a}_j}{R^2-\bar{a}_j z} - \frac{1}{a_j - z}\right) - \sum_k \left(\frac{\bar{b}_k}{R^2-\bar{b}_k z} - \frac{1}{b_k - z}\right).$$

Comme $|z-a_j| > d$, $|z-b_k| > d$, il vient

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{m(R, f) + m\left(R, \frac{1}{f}\right)\right\}$$
$$+\{n(R, 0) + n(R, \infty)\}\left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{d}\right),$$

ce qui fournit l'inégalité (1.1).

**Lemme 2.** *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|z| \leqslant R$ $(0 < R < +\infty)$, et si $z$ est un point tel que $|z| = r < R$ et que les distances de $z$ à tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ sont supérieures à un nombre positif $d$, alors on a*

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{R+r}{R-r} m\left(R, \frac{f'}{f}\right) + \{\bar{n}(R, \infty) + n(R, 0)\}$$
$$\times\left(\log\frac{1}{d} + \log 2R\right) - \frac{(R-r)^2}{4R^2} n(r, f' = 0), \tag{1.2}$$

*où $\bar{n}(R, \infty)$ désigne le nombre réduit des pôles de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqslant R$. (C'est-à-dire, chaque pôle est compté une seule fois.)*

*Démonstration.* Tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ sont des pôles simples de $f'(z)/f(z)$, et $f'(z)/f(z)$ n'a pas d'autres pôles. D'autre part, pour que $f'(z)/f(z)$ s'annule en un point $z_0$ il faut et il suffit que $f(z_0) \neq 0, \infty$ et $f'(z_0) = 0$ simultanément. Appelons $a_j$ les zéros, $b_k$ les pôles de $f(z)$ et $c_l$ les zéros de $f'(z)$ situés dans le cercle $|z| \leqslant R$ et appliquons à la fonction $f'(z)/f(z)$ la formule de Poisson-Jensen, il vient

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})}\right| \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 + |z|^2 - 2R|z|\cos\theta}\, d\theta \\ &\quad + \left(\sum_j{}' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right| + \sum_k{}' \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_k z}{R(z - b_k)}\right|\right) \\ &\quad - \left(\sum_l \log\left|\frac{R^2 - \bar{c}_l z}{R(z - c_l)}\right| - \sum_j{}'' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|\right),\end{aligned}$$

où dans les sommes $\sum_j{}'$ et $\sum_k{}'$ chaque point $a_j$ ou $b_k$ est compté une seule fois, tandis que dans la somme $\sum_j{}''$ chaque point $a_j$ est compté $m_j - 1$ fois, $m_j$ étant l'ordre de multiplicité de $a_j$.

On voit que

$$\sum_j{}' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right| + \sum_j{}'' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right| = \sum_j \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|.$$

Lorsque $|z| \leqslant r$, $|c_l| \leqslant r$, en vertu d'une inégalité de H. Cartan[2, 283–284], on a

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{R^2 - \bar{c}_l z}{R(z - c_l)}\right| &\geqslant \log\frac{R^2 + |c_l||z|}{R(|z| + |c_l|)} = \log\left\{1 + \frac{(R - |z|)(R - |c_l|)}{R(|z| + |c_l|)}\right\} \\ &> \log\left\{1 + \frac{(R - r)^2}{2R^2}\right\} > \frac{(R - r)^2}{4R^2}. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Il vient

$$\sum_{|c_l| \leqslant R} \log\left|\frac{R^2 - \bar{c}_l z}{R(z - c_l)}\right| \geqslant \sum_{|c_l| \leqslant r} \log\left|\frac{R^2 - \bar{c}_l z}{R(z - c_l)}\right| > \frac{(R - r)^2}{4R^2}\, n(r, f' = 0).$$

On arrive ainsi à l'inégalité (1.2).

**Théorème 1.** *Soit $\rho$ un nombre fini positif, et soit $E$ un ensemble fermé non-vide de nombres réels* (mod $2\pi$). *Il existe une fonction méromorphe d'ordre $\rho$, dont les directions de Borel d'ordre $\rho$ sont précisément les demi-droites* $\{\arg z = \theta \mid \theta \in E\}$.

*Démonstration.* Pour chaque entier positif $n$, nous partageons le plan en $n$ secteurs egaux par les demi-droites $\arg z = \dfrac{2j\pi}{n}$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$. Puis nous en excluons les demi-droites $\arg z = \dfrac{2j_0\pi}{n}$ telles que les deux secteurs fermés $\dfrac{2(j_0 - 1)\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2j_0\pi}{n}$ et $\dfrac{2j_0\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2(j_0 + 1)\pi}{n}$ ne contiennent aucun point $e^{i\theta}$, $\theta \in E$. Désignons par $L_{nk}$: $\arg z = \theta_{nk}$ $(n = 1, 2, \cdots;\ k = 1, 2, \cdots, K_n;\ 1 \leqslant K_n \leqslant n)$ les demi-droites non exclues.

Considérons les points

$$a_{nk} = 2^n e^{i\theta_{nk}}, \quad n = 1, 2, \cdots; \quad k = 1, 2, \cdots, K_n, \tag{1.4}$$

et les nombres correspondants

$$m_n = \left[\frac{2^{n\rho}}{n^3}\right], \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.5}$$

où $[x]$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas $x$.

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|a_{nk}|^{\rho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n\left[\frac{2^{n\rho}}{n^3}\right]}{2^{n\rho}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|a_{nk}|^{\rho-\varepsilon}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{2^{n\rho}}{n^3}\right]}{(2^n)^{\rho-\varepsilon}} = +\infty,$$

quelque petit que soit le nombre positif $\varepsilon$, l'exposant de convergence de la suite $\{\underbrace{a_{nk}, a_{nk}, \cdots, a_{nk}}_{m_n} | n = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots, K_n\}$ est donc égal à $\rho$. Formons le produit canonique

$$\Pi_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K_n}\left(1 - \frac{z}{a_{nk}}\right)^{m_n} e^{m_n\left\{\frac{z}{a_{nk}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_{nk}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_{nk}}\right)^q\right\}}, \tag{1.6}$$

où

$$q = \begin{cases} [\rho], & \text{si } \rho \text{ n'est pas un entier,} \\ \rho - 1, & \text{si } \rho \text{ est un entier.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Ensuite, pour les points

$$b_{nk} = \left(2^n + \frac{1}{2^{n\rho}}\right) e^{i\theta_{nk}}, \quad n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots, K_n, \tag{1.8}$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|b_{nk}|^{\rho}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|a_{nk}|^{\rho}} < +\infty,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|b_{nk}|^{\rho-\varepsilon}} \geqslant \frac{1}{2^{\rho-\varepsilon}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} \frac{m_n}{|a_{nk}|^{\rho-\varepsilon}} = +\infty,$$

donc l'exposant de convergence de $\{\underbrace{b_{nk}, b_{nk}, \cdots, b_{nk}}_{m_n} | n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots, K_n\}$ est aussi egal à $\rho$. Formons le produit canonique

$$\Pi_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K_n}\left(1 - \frac{z}{b_{nk}}\right)^{m_n} e^{m_n\left\{\frac{z}{b_{nk}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_{nk}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_{nk}}\right)^q\right\}}. \tag{1.9}$$

En posant

$$f(z) = \frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}, \tag{1.10}$$

nous allons démontrer que la fonction $f(z)$ satisfait à la condition exigée du Théorème 1.

Puisque les ordres des fonctions $\Pi_1(z)$, $\Pi_2(z)$ sont égaux à $\rho$, l'ordre de $f(z)$ est égal à $\rho$.

Maintenant nous démontrons que, $\theta_0$ étant un nombre quelconque de l'ensemble $E$, la demi-droite $\arg z = \theta_0$ est une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$.

En effet, si le contraire a lieu, on peut choisir un nombre positif $\delta$, un nombre positif $\lambda$ $(\lambda < \rho)$ et un nombre complexe fini $\alpha$ non nul tels que, en désignant par $n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)$ le nombre des zéros de $f(z) - \alpha$ dans la région $(|z| \leqslant r) \cap (|\arg z - \theta_0| \leqslant \delta)$, on a $n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha) < r^\lambda$, lorsque $r$ est suffisamment grand.

Vu que $\theta_0 \in E$, il existe pour chaque $n$ suffisamment grand un point $a_{nk}$ tel que, le cercle $C$: $|z - a_{nk}| < 4$ est contenu dans la région $|\arg z - \theta_0| < \delta$. Dans le cercle $C$, $f(z)$ n'a qu'un zéro en $a_{nk}$ dont l'ordre de multiplicité est égal à $m_n$, et n'a qu'un pôle en $b_{nk}$ dont l'ordre de multiplicité est aussi égal à $m_n$, et le nombre des zéros de $f(z) - \alpha$ ne dépasse pas $r_n^\lambda$ avec $r_n = 2^n + 4$.

Pourvu que $n$ soit suffisamment grand, on a

$$T(2r_n, f - \alpha) < (2r_n)^{\rho+1},$$

$$T\left(2r_n, \frac{1}{f - \alpha}\right) < (2r_n)^{\rho+1},$$

$$n(2r_n, f = \alpha) < (2r_n)^{\rho+1},$$

$$n(2r_n, f = \infty) < (2r_n)^{\rho+1}.$$

Appelons $d_j$ $(j = 1, 2, \cdots, J)$ les points où $f(z) = \alpha$ ou $\infty$ dans le cercle $|z| < 2r_n$ et considérons les cercles $|z - d_j| < d \left(d = \dfrac{1}{8(2r_n)^{\rho+1}}\right)$ dont l'ensemble est désigné par $(\gamma)$. En appliquant le Lemme 1, on a pour un point quelconque $z$, $|z| \leqslant r_n$, $z \bar{\in} (\gamma)$ l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\right| &\leqslant \log^+(2r_n) + 3\log\frac{1}{r_n} + \log^+ m(2r_n, f - \alpha) \\ &+ \log^+ m\left(2r_n, \frac{1}{f - \alpha}\right) + \log^+ n(2r_n, f = \alpha) \\ &+ \log^+ n(2r_n, f = \infty) + \log(8(2r_n)^{\rho+1}) \\ &+ 5\log 2 \leqslant (5\rho + 6)\log^+(2r_n) + 8\log 2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Il existe deux circonférences $|z - a_{nk}| = r_1$, $1 < r_1 < 2$ et $|z - a_{nk}| = r_2$, $3 < r_2 < 4$ qui ne coupent pas les cercles $(\gamma)$. Le Lemme 2 donne pour un point quelconque $z$ de la circonférence $|z - a_{nk}| = r_1$,

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\right| &\leqslant \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} m\left(r_2, a_{nk}, \frac{f'}{f - \alpha}\right) \\ &+ \{\bar{n}(C, f = \infty) + n(C, f = \alpha)\}\left(\log\frac{1}{\jmath} + \log 2r_2\right)\end{aligned}$$

$$- \frac{(r_2 - r_1)^2}{4r_2^2} n(|z - a_{nk}| \leqslant r_1, f' = 0)$$

$$\leqslant 6\{(5\rho + 6)\log^+(2r_n) + 8\log 2\} + (1 + r_n^\lambda)$$

$$\times \{\log 8(2r_n)^{\rho+1} + \log 8\} - \frac{1}{4 \times 16}\left(\frac{2^{n\rho}}{n^3} - 2\right). \tag{1.12}$$

Grâce à $r_n = 2^n + 4$ et $\lambda < \rho$, on a donc

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\right| < 0, \tag{1.13}$$

dès que $n$ est assez grand.

En outre, d'après la formule

$$n(|z - a_{nk}| \leqslant r_1, f = \infty) - n(|z - a_{nk}| \leqslant r_1, f = \alpha) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{|z-a_{nk}|=r_1} \frac{f'}{f - \alpha} dz,$$

on trouve

$$\left[\frac{2^{n\rho}}{n^3}\right] - r_n^\lambda \leqslant 2 \max_{|z-a_{nk}|=r_1}\left|\frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\right|. \tag{1.14}$$

La comparaison des inégalités (1.13) et (1.14) donne

$$\left[\frac{2^{n\rho}}{n^3}\right] \leqslant r_n^\lambda + 2 = (2^n + 4)^\lambda + 2, \tag{1.15}$$

dès que $n$ est assez grand. Ceci est impossible, car $\lambda < \rho$. La demi-droite $\arg z = \theta_0$ est donc une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$.

Enfin nous allons démontrer que, si $\theta_1 \bar{\in} E$, la demi-droite $\arg z = \theta_1$ n'est pas une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$.

Pour cela nous donnons d'abord une limitation supérieure de $|f'(z)/f(z)|$. D'après la formule

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n} m_n \left\{\frac{a_{nk} - b_{nk}}{(a_{nk} - z)(b_{nk} - z)} + \frac{b_{nk} - a_{nk}}{a_{nk}b_{nk}}\right.$$

$$+ z\left(\frac{1}{a_{nk}} + \frac{1}{b_{nk}}\right)\frac{b_{nk} - a_{nk}}{a_{nk}b_{nk}} + \cdots$$

$$\left. + z^{q-1}\left(\frac{1}{a_{nk}^{q-1}} + \cdots + \frac{1}{b_{nk}^{q-1}}\right)\frac{b_{nk} - a_{nk}}{a_{nk}b_{nk}}\right\},$$

si $z$ est un point tel que $|z| \gg 1$ et que $\min\limits_{n,k}\{|z - a_{nk}|, |z - b_{nk}|\} \geqslant d|z|$ avec un nombre positif $d$, alors on a

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\left\{\frac{1}{d^2|z|^2} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{2|z|}{2^{3n}} + \cdots + \frac{q|z|^{q-1}}{2^{(q+1)n}}\right\}\frac{m_n}{2^{n\rho}}$$

$$\leqslant \left\{\frac{1}{d^2|z|^2} + 1 + 2|z| + \cdots + q|z|^{q-1}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Il vient

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{d^2|z|^2}, & \text{lorsque } q = 0, \\ 2q|z|^{q-1}, & \text{lorsque } q \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.16}$$

Comme $\theta_1 \bar{\in} E$ et $E$ est fermé, il existe un secteur $G_1$: $|\arg z - \theta_1| < \delta$ tel que, lorsque $n$ est suffisamment grand, les demi-droites $L_{nk}$ $(n \geqslant n_0,\ 1 \leqslant k \leqslant K_n)$ ne sont pas contenues dans $G_1$. Par conséquent, il existe un nombre positif $r_0$ tel que $f(z)$ n'a ni zéro ni pôle dans la région $(|z| > r_0) \cap G_1$.

Supposons que $\arg z = \theta_1$ soit une direction de Borel d'ordre $\rho$ de la fonction $f(z)$, alors il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho$[6, p. 33], $\Gamma_m$: $|z - z_m| < \varepsilon_m|z_m|$ avec $z_m = |z_m|e^{i\theta_1}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} |z_m| = +\infty$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \varepsilon_m = 0$. Lorsque $m$ est suffisamment grand, $\Gamma_m$ est contenu dans le secteur $|\arg z - \theta_1| < \dfrac{\delta}{2}$. Donc on a pour un point quelconque $z$ de $\Gamma_m$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{\left(\sin\dfrac{\delta}{2}\right)^2|z|^2} \leqslant \dfrac{32}{\delta^2|z_m|^2}, & \text{lorsque } q = 0, \\ 2q|z|^{q-1} \leqslant 3q|z_m|^{q-1}, & \text{lorsque } q \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Parce que $\Gamma_m (m > m_0)$ est une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho$ et que $f(z)$ est holomorphe dans ces cercles, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$ il existe deux points $z'_m$ et $z''_m$ de $\Gamma_m$ tels que $|f(z'_m)| \leqslant 1$ et $|f(z''_m)| \geqslant e^{|z_m|^{\rho-\varepsilon}}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\log|f(z''_m)| - \log|f(z'_m)|| &\leqslant \int_{\overline{z'_m z''_m}} \left|\frac{f'}{f}\right||dz| \leqslant 2\varepsilon_m|z_m| \cdot \max_{z\in\overline{z'_m z''_m}} \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \\ &\leqslant \begin{cases} \dfrac{64\varepsilon_m}{\delta^2|z_m|}, & \text{lorsque } q = 0, \\ 6q\varepsilon_m|z_m|^q, & \text{lorsque } q \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on arrive à

$$|z_m|^{\rho-\varepsilon} \leqslant 64(q+1)|z_m|^q, \quad (m > m_0). \tag{1.18}$$

Mai ceci est impossible, car $q < \rho$ et on peut prendre $\varepsilon$ arbitrairement petit. Donc la demi-droite $\arg z = \theta_1$ n'est pas une direction de Borel d'ordre $\rho$ de $f(z)$. Le théorème se trouve donc démontré.

## II

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. D'après un résultat de G. Valiron[6, p. 32], nous convenons de dire que $f(z)$ admet une demi-droite $\arg z = \theta_0$ comme direction de Borel d'ordre $\lambda (0 < \lambda < +\infty)$, si

$$\rho(\theta_0, \alpha) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)}{\log r}\right\} = \lambda, \tag{2.1}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$, sauf au plus les $\alpha$ appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle (sur la sphère de Riemann). Pour les $\alpha$ exceptionnels on a $\rho(\theta_0, \alpha) > \lambda$ sauf peut être pour deux valeurs $\alpha$. Nous disons que $f(z)$ admet $\arg z = \theta_0$ comme direction de Borel d'ordre infini, si $\rho(\theta_0, \alpha) = +\infty$ pour tous les nombres complexes $\alpha$ sauf deux au plus. Nous disons que $f(z)$ admet $\arg z = \theta_0$ comme direction de Borel d'ordre zéro, si $\rho(\theta_0, \alpha) = 0$ pour tous les nombres complexes $\alpha$ sauf au plus pour les $\alpha$ appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle (sur la sphère de Riemann), et

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)}{(\log r)^2} \right\} = +\infty \tag{2.2}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$ sauf deux au plus. Nous convenons de dire que $f(z)$ n'admet pas $\arg z = \theta_0$ comme direction singulière, s'il existe trois nombres complexes distincts $\alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ et un nombre positif $\delta_0$ tels que $f(z)$ ne prend pas les valeurs $\alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ dans le secteur $|\arg z - \theta_0| < \delta_0$.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Supposons qu'elle admette une direction de Borel, et considérons l'ensemble $E$ des nombres réels $\theta \pmod{2\pi}$ tels que la demi-droite $\arg z = \theta$ est une direction de Borel de la fonction $f(z)$. Evidemment l'ensemble $E$ est fermé non-vide. Pour un nombre quelconque $\theta$ de $E$, désignons par $\rho(\theta)$ l'ordre de la direction de Borel $\arg z = \theta$. Ainsi on définit une fonction $\rho(\theta)$ dans $E$. Il est évident que $0 \leqslant \rho(\theta) \leqslant +\infty$ et si $\theta_0 \in E$, on a $\overline{\lim\limits_{\substack{\theta \in E \\ \theta \to \theta_0}}} \rho(\theta) \leqslant \rho(\theta_0)$. C'est-à-dire que $\rho(\theta)$ est une fonction semi-continue supérieurement dans $E$. L'ordre de $f(z)$ est égal à $\max\limits_{\theta \in E} \rho(\theta)$.

Inversement, on peut démontrer le théorème suivant qui contient le Théorème 1

*direction singulière.*

*Démonstration.* Pour chaque entier positif $n$, nous partageons le plan en $n$ secteurs egaux par les demi-droites $\arg z = \dfrac{2j\pi}{n}$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$. Puis nous en excluons les demi-droites $\arg z = \dfrac{2j_0\pi}{n}$ telles que les deux secteurs fermés $\dfrac{2(j_0 - 1)\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2j_0\pi}{n}$ et $\dfrac{2j_0\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2(j_0+1)\pi}{n}$ ne contiennent aucun point $e^{i\theta}$, $\theta \in E$. Désignons par $L_{nk}$: $\arg z = \theta_{nk}$ $(n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots, K_n; 1 \leqslant K_n \leqslant n)$ les demi-droites non exclues.

Posons $\rho'_{nk} = \max\limits_{\substack{\theta \in E \\ |\theta - \theta_{nk}| \leqslant \frac{2\pi}{n}}} \rho(\theta)$ et

$$\rho_{nk}=\begin{cases}\log n & \text{si } \rho'_{nk}=+\infty,\\ \rho'_{nk} & \text{si } \dfrac{1}{\log(n+1)}\leqslant\rho'_{nk}<+\infty,\\ \dfrac{1}{\log(n+1)} & \text{si } 0\leqslant\rho'_{nk}<\dfrac{1}{\log(n+1)},\end{cases}\tag{2.3}$$

et considérons les points

$$a_{nk}=2^n e^{i\theta_{nk}},\quad n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,K_n,\tag{2.4}$$

et les nombres

$$m_{nk}=\left[\frac{2^{n\rho_{nk}}}{n^3}\right],\qquad n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,K_n.\tag{2.5}$$

Lorsque $\rho_0=\max\limits_{\theta\in E}\rho(\theta)=+\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}}{|a_{nk}|^{\lambda}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\dfrac{2^{n\log n}}{n^3}\right]}{2^{n\lambda}}=+\infty,$$

quel que soit le nombre positif $\lambda$. Lorsque $0<\rho_0<+\infty$, on a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}}{|a_{nk}|^{\rho_0}}\leqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{K_n\left[\dfrac{2^{n\rho_0}}{n^3}\right]}{2^{n\rho_0}}<+\infty,$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}}{|a_{nk}|^{\rho_0-\varepsilon}}\geqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\left[\dfrac{2^{n\rho_0}}{n^3}\right]}{(2^n)^{\rho_0-\varepsilon}}=+\infty,$$

quelque petit que soit le nombre positif $\varepsilon$. Lorsque $\rho_0=0$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}}{|a_{nk}|^{\varepsilon}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n\left[\dfrac{2^{\frac{n}{\log(n+1)}}}{n^3}\right]}{2^{n\varepsilon}}<+\infty.$$

Par conséquent, l'exposant de convergence de la suite $\{\underbrace{a_{nk},a_{nk},\cdots,a_{nk}}_{m_{nk}}|n=1,2,\cdots;$ $k=1,2,\cdots,K_n\}$ est égal à $\rho_0(0\leqslant\rho_0\leqslant+\infty)$.

D'autre part, considérons les points

$$b_{nk}=\left(2^n+\frac{1}{2^{n\rho_{nk}}}\right)e^{i\theta_{nk}},\quad n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,K_n.\tag{2.6}$$

L'exposant de convergence de la suite $\{\underbrace{b_{nk},b_{nk},\cdots,b_{nk}}_{m_{nk}}|n=1,2,\cdots;k=1,2,\cdots,K_n\}$ est aussi égal à $\rho_0$.

En posant

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K_n}\left(\frac{1-\dfrac{z}{a_{nk}}}{1-\dfrac{z}{b_{nk}}}\right)^{m_{nk}}, \tag{2.7}$$

nous allons démontrer que la fonction $f(z)$ satisfait à la condition exigée du théorème.

D'abord on peut démontrer que l'ordre de $f(z)$ est égal à $\rho_0$. Ceci est évident si $\rho_0=+\infty$, parce que l'exposant de convergence des zéros de $f(z)$ est infini. Dans le cas où $0<\rho_0<+\infty$, en prenant

$$q=\begin{cases}[\rho_0], & \text{si } \rho_0 \text{ n'est pas un entier,}\\ \rho_0-1, & \text{si } \rho_0 \text{ est un entier,}\end{cases}$$

on a

$$f(z)=e^{P(z)}\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}, \tag{2.8}$$

où

$$P(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}m_{nk}\left\{z\left(\frac{1}{a_{nk}}-\frac{1}{b_{nk}}\right)+\cdots+\frac{z^q}{q}\left(\frac{1}{a_{nk}^q}-\frac{1}{b_{nk}^q}\right)\right\},$$

$$\Pi_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K_n}\left(1-\frac{z}{a_{nk}}\right)^{m_{nk}}e^{m_{nk}\left\{\frac{z}{a_{nk}}+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_{nk}}\right)^q\right\}},$$

$$\Pi_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K_n}\left(1-\frac{z}{b_{nk}}\right)^{m_{nk}}e^{m_{nk}\left\{\frac{z}{b_{nk}}+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_{nk}}\right)^q\right\}}.$$

D'après (2.4), (2.5) et (2.6), on voit que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}}{j}\left(\frac{1}{a_{nk}^j}-\frac{1}{b_{nk}^j}\right), \quad j=1,2,\cdots,q,$$

sont absolument convergentes. Donc $P(z)$ est un polynôme dont le degré ne dépasse pas $q$. De plus, les ordres de $\Pi_1(z)$ et $\Pi_2(z)$ sont $\rho_0$, donc l'ordre de $f(z)$ est égal à $\rho_0$.

Il est évident que l'ordre de $f(z)$ est égal à zéro si $\rho_0=0$.

Puis nous démontrons que, si $\theta_1 \bar{\in} E$, $\arg z=\theta_1$ n'est pas une direction singulière de $f(z)$. Pour cela, nous donnons d'abord une limitation supérieure de $|f'(z)/f(z)|$.

Supposons que $\min\limits_{n,k}\{|z-a_{nk}|,\ |z-b_{nk}|\}\geqslant d|z|$, $d>0$; on a

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}(a_{nk}-b_{nk})}{(a_{nk}-z)(b_{nk}-z)}\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\frac{m_{nk}\dfrac{1}{2^{n\rho_{nk}}}}{d^2|z|^2}\leqslant\frac{1}{d^2|z|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{2.9}$$

Comme $\theta_1 \bar{\in} E$ et $E$ est fermé, il existe un secteur $G_1$: $|\arg z - \theta_1| < \delta$ tel que les demi-droites $L_{nk}$ $(n \geqslant n_0,\ k = 1, 2, \cdots, K_n)$ ne sont pas contenues dans $G_1$. Donc il existe un nombre positif $r_0$ tel que $f(z)$ n'a ni zéro ni pôle dans la région $(|z| > r_0) \cap G_1$. Si $r_0,\ r$ $(r_0 < r)$ sont deux nombres positifs et suffisamment grands, et $|\theta_1 - \theta| \leqslant \delta/2$, on a pour les points $z_0 = r_0 e^{i\theta_1}$ et $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} |\log|f(z)| - \log|f(z_0)|| &\leqslant \int_{\theta_1}^{\theta} \left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| r d\varphi + \int_{r_0}^{r} \left|\frac{f'(te^{i\theta_1})}{f(te^{i\theta_1})}\right| dt \\ &\leqslant \frac{2}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} \left\{\frac{\delta}{2r} + \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Par suite, étant donné un nombre positif $\eta$, il existe un nombre positif correspondant $r_0$ tel que, lorsque $|z| \geqslant r_0$, $|\arg z - \theta_1| \leqslant \delta/2$, on a

$$|f(z_0)|e^{-\eta} \leqslant |f(z)| \leqslant |f(z_0)|e^{\eta}. \tag{2.10}$$

L'image du segment $\{(|z| \leqslant r_0) \cap (\arg z = \theta_1)\}$ par $f(z)$ est une courbe $\Gamma_0$. Pour trois valeurs $\alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ qui ne sont contenues ni dans l'anneau $|f(z_0)|e^{-\eta} \leqslant |w| \leqslant |f(z_0)|e^{\eta}$ ni sur $\Gamma_0$, il existe un nombre positif $\delta_0$ tel que $f(z) - \alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ n'ont aucun zéro dans $|\arg z - \theta_1| < \delta_0$. C'est-à-dire que la direction $\arg z = \theta_1$ n'est pas une direction singulière de $f(z)$.

Ensuite nous démontrons que, $\theta_0$ étant un nombre quelconque de $E$, la demi-droite $\arg z = \theta_0$ est une direction de Borel d'ordre $\rho(\theta_0)$ de $f(z)$.

Dans le cas où $\rho(\theta_0) = +\infty$, il existe une suite de points $a_{nk_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, dont les arguments $\theta_{nk_n}$ tendent vers $\theta_0$ et l'exposant de convergence de la suite $\{\underbrace{a_{nk_n}, a_{nk_n}, \cdots a_{nk_n}}_{m_{nk_n}} | n = 1, 2, \cdots\}$ est infini. À l'aide d'une inégalité fondamentale sur les fonctions méromorphes dans un domaine angulaire, on peut démontrer sans difficulté que $\arg z = \theta_0$ est une direction de Borel d'ordre infini de $f(z)$[7].

Dans le cas où $0 < \rho(\theta_0) < +\infty$, nous allons démontrer que

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f = \alpha)}{\log r} \right\} \geqslant \rho(\theta_0) \tag{2.11}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$, sauf au plus deux valeurs exceptionnelles.

Supposons que ceci ne soit pas vrai, en vertu des relations

$$\begin{gathered} \lim_{\delta \to 0} \left\{ \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f = 0)}{\log r} \right\} = \rho(\theta_0), \\ \lim_{\delta \to 0} \left\{ \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f = \infty)}{\log r} \right\} = \rho(\theta_0), \end{gathered} \tag{2.12}$$

il existe trois nombres complexes $\alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ finis non nuls distincts, un nombre positif $\delta_0$ et un nombre $\lambda$, $0 < \lambda < \rho(\theta_0)$, tels que lorsque $r$ est suffisamment grand, on a

$$n(r, \theta_0, \delta_0, f = \alpha_j) < r^\lambda, \quad (j = 1, 2, 3).$$

On ecrit

$$f(z) = f_1(z) f_2(z), \quad f_1(z) = \Pi' \left( \frac{1 - \dfrac{z}{a_{nk}}}{1 - \dfrac{z}{b_{nk}}} \right)^{m_{nk}}, \quad f_2(z) = \Pi'' \left( \frac{1 - \dfrac{z}{a_{nk}}}{1 - \dfrac{z}{b_{nk}}} \right)^{m_{nk}}, \tag{2.13}$$

où $\Pi'$ désigne le produit infini correspondant aux $a_{nk}$ et $b_{nk}$ situés dans $G$: $|\arg z - \theta_0| \leqslant \delta_0$. Par la même méthode dont on se sert pour établir l'inégalité (2.10), on voit que, étant donné un nombre positif quelconque $\eta$, il existe un nombre positif $r_0$ tel que, si $|z| \geqslant r_0$, $|\arg z - \theta_0| \leqslant \delta_0/2$, on a

$$|f_2(z_0)| e^{-\eta} \leqslant |f_2(z)| \leqslant |f_2(z_0)| e^{\eta},$$

où $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$.

Puisque la fonction $\rho(\theta)$ est semi-continue supérieurement et $\rho(\theta_0) < +\infty$, en prenant $\delta_0$ suffisamment petit, l'ordre $\rho_1$ de la fonction $f_1(z)$ satisfait à la condition $0 < \rho_1 \leqslant \max\limits_{\substack{\theta \in E \\ |\theta - \theta_0| \leqslant \delta_0}} \rho(\theta)$. Par une méthode analogue à celle employée pour établir le Théorème 1, on peut démontrer que $f_1(z)$ admet $\arg z = \theta_0$ comme direction de Borel d'ordre $\rho(\theta_0)$. Alors il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho(\theta_0)$[6, p. 33]: $|z - z_m| < \varepsilon_m |z_m|$ $(m = 1, 2, \cdots)$ avec $z_m = |z_m| e^{i\theta_0}$, $\lim\limits_{m \to +\infty} |z_m| = +\infty$, $\lim\limits_{m \to +\infty} \varepsilon_m = 0$.

Lorsque $m$ est suffisamment grand, le cercle $|z - z_m| < 20\varepsilon_m |z_m|$ est contenu dans la région $G$. Posons

$$z = z_m + 20\varepsilon_m |z_m| t, \tag{2.14}$$

$$f_l(z) = f_l(z_m + 20\varepsilon_m |z_m| t) = g_l(t), \quad l = 1, 2. \tag{2.15}$$

Dans le cercle $|t| < 1$, le nombre total des zéros des fonctions $g_1(t) - \dfrac{\alpha_j}{g_2(t)}$ $(j = 1, 2, 3)$ est inférieur à $(|z_m| + 20\varepsilon_m |z_m|)^\lambda$; les fonctions $\dfrac{\alpha_j}{g_2(t)}$ $(j = 1, 2, 3)$ et $\dfrac{\alpha_j - \alpha_k}{g_2(t)}$ $(1 \leqslant j < k \leqslant 3)$ n'ont ni zéro ni pôle. De plus, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \log^+ \left\{ \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\alpha_j}{g_2(t)} \right| + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 3} \left| \frac{g_2(t)}{\alpha_j - \alpha_k} \right| \right\} d\sigma_t \\ &\quad = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z - z_m| < 20\varepsilon_m |z_m|} \log^+ \left\{ \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\alpha_j}{f_2(z)} \right| \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 3} \left| \frac{f_2(z)}{\alpha_j - \alpha_k} \right| \right\} \frac{d\sigma_z}{(20\varepsilon_m |z_m|)^2} = O(1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Donc d'après un théorème de A. Rauch[6, p. 21], pour tous les nombres complexes $\alpha$, le nombre des zéros de $g_1(t) - \alpha$ dans le cercle $|t| < \dfrac{1}{20}$ est inférieur à $C(|z_m| + 20\varepsilon_m |z_m|)^\lambda$, sauf au plus pour des $\alpha$ représentés sur la sphère à l'intérieur d'un petit cercle. C'est-à-dire, le nombre des zéros de $f_1(z) - \alpha$ dans le cercle $|z - z_m| < \varepsilon_m |z_m|$

est inférieur à $C(|z_m| + 20\varepsilon_m|z_m|)^\lambda$. Puisque $\lambda < \rho(\theta_0)$, on arrive à une contradiction

Puis nous allons démontrer que

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f=\alpha)}{\log r}\right\} \leqslant \rho(\theta_0) \tag{2.17}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$, sauf au plus les $\alpha$ appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle (sur la sphère).

En effet, si le contraire a lieu, il existe un ensemble $e$ de mesure linéaire non-nulle tel que, pour $\alpha \in e$ on a

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f=\alpha)}{\log r}\right\} > \rho(\theta_0) + 4\varepsilon,$$

$\varepsilon$ étant un nombre positif assez petit. D'où l'on trouve[6, p. 33] une suite de cercles $\Gamma_m$: $|z - z_m| < \varepsilon_m|z_m|$, $\lim_{m\to+\infty} |z_m| = +\infty$, $\lim_{m\to+\infty} \arg z_m = \theta_0$, $\lim_{m\to+\infty} \varepsilon_m = 0$ telle que, lorsque $m$ est suffisamment grand, on a

$$n(\Gamma_m, f=\alpha) > |z_m|^{\rho(\theta_0)+3\varepsilon} \tag{2.18}$$

pour tous les nombres complexes, sauf les $\alpha$ représentés dans deux cercles de rayon $o(1)$.

Prenons trois nombres complexes $\beta_j$ $(j = 1, 2, 3)$ finis non nuls distincts, et faisons les transformations (2.14) et (2.15). Dans le cercle $|t| < 1$, le nombre total des zéros des fonctions $g(t) - \beta_j g_2(t)$ (où $g(t) = g_1(t)g_2(t)$, $j = 1, 2, 3$) est inférieur à $(|z_m| + 20\varepsilon_m|z_m|)^{\rho(\theta_0)+\varepsilon}$, les fonctions $\beta_j g_2(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ et $(\beta_k - \beta_j)g_2(t)$ $(1 \leqslant k < j \leqslant 3)$ n'ont ni zéro ni pôle. De plus, on a

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} \log^+\left\{\sum_{k=1}^{2} |\beta_k g_2(t)| + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant 3}\left|\frac{1}{(\beta_k - \beta_j)g_2(t)}\right|\right\} d\sigma_t = O(1).$$

Donc d'après le théorème cité de A. Rauch, pour tous les nombres complexes $\alpha$ le nombre des zéros de $g(t) - \alpha$ dans le cercle $|t| < 1/20$ est inférieur à $C(|z_m| + 20\varepsilon_m|z_m|)^{\rho(\theta_0)+\varepsilon} < |z_m|^{\rho(\theta_0)+2\varepsilon}$, sauf au plus pour des $\alpha$ représentés sur la sphère à l'intérieur d'un petit cercle, dès que $m$ est assez grand, ce qui est impossible d'après (2.18).

Enfin lorsque $\rho(\theta_0) = 0$, d'une part, on peut démontrer comme auparavant que

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r, \theta_0, \delta, f=\alpha)}{\log r}\right\} = 0 \tag{2.19}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$ sauf au plus les $\alpha$ appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle. D'autre part, par un procédé analogue à la démonstration du Théorème 1, on trouve une suite de points $a_{nk_n}$ dont les arguments $\theta_{nk_n}$ tendent vers $\theta_0$ et en désignant par $C_n$ le cercle $|z - a_{nk_n}| < 4$, on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{n(C_n, f_1=\alpha)}{(\log r_n)^2} = +\infty$$

pour tous les nombres $\alpha$ complexes finis non nuls. Alors on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n(C'_n, f = \alpha)}{(\log r_n)^2} = +\infty \tag{2.20}$$

pour tous les nombres complexes $\alpha$, sauf au plus deux valeurs exceptionnelles, où $C'_n$ désigne le cercle $|z - a_{nk_n}| < 80$. Donc $\arg z = \theta_0$ est une direction de Borel d'ordre zéro de $f(z)$.

## III

Le Théorème 1 montre que la distribution des directions de Borel d'une fonction méromorphe d'ordre fini positif est arbitraire, sauf que ces directions forment un ensemble fermé non-vide de demi-droites issues de l'origine. On en tire, en particulier, les conséquences suivantes:

1. Soit $B$ une demi-droite issue de l'origine et soit $\rho$ un nombre fini positif (qui peut être supérieur à $1/2$). Il existe une fonction méromorphe d'ordre $\rho$ telle qu'elle n'admet que $B$ pour direction de Borel d'ordre $\rho$.

2. Soient $B_1$, $B_2$ deux demi-droites issues de l'origine (Leur angle peut être arbitraire) et soit $\rho$ un nombre fini positif. Il existe une fonction méromorphe d'ordre $\rho$ telle qu'elle n'admet que $B_1$ et $B_2$ pour directions de Borel d'ordre $\rho$.

Évidemment, en ce qui concerne la distribution de directions de Borel, il y a une difference profonde entre le cas général des fonctions méromorphes et le cas particulier des fonctions entières[6, 44—45]. Cette différence résulte du fait qu'une fonction entière admet la valeur infinie pour valeur déficiente dont le défaut est égal à un[8, 9].

En 1969, J. M. Anderson et J. Clunie[1] a énoncé la conjecture suivante[1)]:

Soit $\rho$ un nombre fini et supérieur à $1/2$. Soit $E$ un ensemble fermé non-vide de demi-droites issues de l'origine tel que tout angle d'ouverture supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$, $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ contient au moins une demi-droite de $E$[2)]. Il existe une fonction entière d'ordre $\rho$ dont les directions de Julia sont précisément les demi-droites de l'ensemble $E$.

Nous pouvons donner quelques contre-exemples pour cette conjecture. Par exemple, si $\rho = 2$ et $E = \{\arg z = 0, (2/3)\pi, (4/3)\pi\}$, il n'existe aucune fonction entière d'ordre deux dont les directions de Julia sont précisément les demi-droites de l'ensemble $E$. En effet, supposons que $f(z)$ soit une telle fonction. Alors $f(z)$ admettant la valeur infinie pour valeur déficiente, on peut conclure, d'après un résultat de l'article [8], qu'elle possède deux directions de Borel faisant un angle inférieur à $\pi/\rho = \pi/2$. *A fortiori*, elle possède deux directions de Julia faisant un angle inférieur á $\pi/2$. Ceci est impossible d'après l'hypothèse. Plus généralement, par la même méthode on peut

1) En ce qui concerne la distribution des directions singulières des fonctions entières, on peut voir [1], [4], [5], [9].

2) Dans le cas où $\rho>1$ et $E$ ne contient que deux demi-droites issues de l'origine, on doit supposer que l'angle aigu de ces deux demi-droites soit égal à $\pi/\rho$.

démontrer que, pour un nombre arbitraire $\rho \geqslant 2$, il n'existe aucune fonction entière d'ordre $\rho$ dont les directions de Julia sont les demi-droites de l'ensemble

$$E = \begin{cases} \left\{\arg z = k\dfrac{\pi}{[\rho]} \,\middle|\, k = 0, 1, \cdots, 2[\rho]-1\right\}, & \text{si } \rho \text{ n'est pas un entier,} \\ \left\{\arg z = \dfrac{2k\pi}{2\rho - 1} \,\middle|\, k = 0, 1, \cdots, 2\rho - 2\right\}, & \text{si } \rho \text{ est un entier.} \end{cases}$$

$r \to +\infty$

méromorphe $f(z)$ dont les directions de Julia sont précisément les demi-droites $\{\arg z = \theta \mid \theta \in E\}$ et telle qu'on a $T(r, f) < \varphi(r) \log r$, dès que $r$ est assez grand?

## Index Bibliographique


[1] Anderson, J. M. & Clunie, J.: Entire functions of finite order and lines of Julia, *Math. Z.*, **112** (1969), 59—73.

[2] Cartan, H.: Sur les systems de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications, *Ann.* École Norm. Sup., 3 série, **45** (1928), 255—346.

[3] Cartwright, M. L.: Integral functions, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, (1956), No. 44, Cambridge.

[4] Hayman, W. K.: Angular value distribution of power series with gaps, *Proc. London Math. Soc.*, **24** (1972), 590—624.

[5] Pólya, G.: Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, George Pólya: *Collected Papers*, Vol. 1, *Singularities of Analytic Functions*, (1974), MIT Press, 363—458.

[6] Valiron, G.: *Directions de Borel des fonctions méromorphes*, *Mém. Sci. Math.* Fasc. 89 (1938).

[7] Valiron, G.: Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre infini, *C. R. Acad. Sci*, **206** (1938), 575—577.

[8] Yang, Lo et Chang, Kuan-heo: Sur la distribution des directions de Borel des fonctions méromorphes, *Sci. Sinica*, **16** (1973), 465—482.

[9] Yang, Lo & Chang, Kuan-heo: Distribution of Borel directions of entire functions, *Acta Math. Sinica*, (to appear).