

## 王元院士漫谈哥德巴赫猜想

作者：王丹红 来源：科学时报 发布时间：2009-7-2

[http://www.360doc.com/content/19/0513/16/25479405\\_835436653.shtml](http://www.360doc.com/content/19/0513/16/25479405_835436653.shtml)

“我劝大家现在不要去碰哥德巴赫猜想，还是把基础打好。如果要搞这个问题，最低限度，你应该有大学数学专业毕业生的知识水平，并将已有的文献都看明白了；否则，就是浪费时间。”

1978年2月17日，《人民日报》发表了徐迟的长篇报告文学——《哥德巴赫猜想》。从此，陈景润的名字和哥德巴赫猜想一起传遍神州大地。

近日，在一项面向公众的活动中，数论学家王元院士发表了题为《漫谈哥德巴赫猜想》的演讲，并向热衷于证明这一猜想的数学爱好者提出建议和忠告。

王元表示，关于哥德巴赫猜想，报纸、电台和电视上都介绍了很多。“但报纸上的宣传也好，群众的理解也好，都是不完整的，也是不科学的。”王元说。

他谈到三个方面的问题：一、什么是哥德巴赫猜想；二、为什么哥德巴赫的证明如此重要；三、目前最终证明哥德巴赫猜想的方法还没有出来，劝大家还是把基础打好，不要轻易去证明哥德巴赫猜想。

王元是我国早期从事哥德巴赫猜想证明的数学家之一，1952年从浙江大学数学系毕业，经陈建功与苏步青推荐到中国科学院数学研究所工作，在华罗庚的指导下研究数论和哥德巴赫猜想。

据王元介绍，华罗庚早在20世纪30年代就开始研究哥德巴赫猜

想，并得到了相当好的结果；1966年，陈景润证明了“ $1+2$ ”是迄今为止世界上有关哥德巴赫猜想证明的最好成果。

什么是哥德巴赫猜想

1742年6月7日，德国数学家克里斯蒂安·哥德巴赫写信给瑞士数学家莱昂哈德·欧拉，提出两个猜想：

- (1) 任何一个大于2的偶数都可以表示为两个素数之和；
- (2) 任何一个大于5的奇数是3个素数之和。

1742年6月30日，欧拉在给哥德巴赫的回信中明确表示，他深信哥德巴赫的这两个猜想都是正确的定理，但他不能加以证明。

这就是著名的哥德巴赫猜想。

“容易证明(2)是(1)的推论，所以最重要的是(1)，这是两个素数，所以我们称它为‘ $1+1$ ’，这个问题到现在也没有解决。”王元说，“但是，现在很多人说解决了这个问题，来的信简直堆积如山，有人搞得倾家荡产，这是没有必要的，因为这个问题还不到解决的时候。我劝大家不要做这个问题。”

哥德巴赫猜想的内容十分简洁，但它的证明却异乎寻常的困难。从哥德巴赫写信之日起，直至1920年，并没有一个方法可以用来证明这个问题。

1900年，在法国巴黎召开的第2届国际数学大会上，德国数学家大卫·希尔伯特在他著名的演说中，为20世纪的数学家建议了23个问题，而哥德巴赫猜想(1)就是他第八个问题的一部分。

1912年，在英国剑桥召开的第5届国际数学大会上，德国数学

家 E·朗道将哥德巴赫猜想列为数论中按当时数学水平不能解决的 4 个问题之一。

1921 年，数论泰斗、英国数论学家哈罗德·哈代在德国哥德哈根数学会的演讲中，宣称猜想（1）的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”。

因此，王元说：“哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与困难的问题之一。”他给大家展示了一幅当年哥德巴赫写给欧拉的信的手迹复本。

哥德巴赫猜想为何如此重要

在数学界，关于整数未解决的问题非常多，为什么哥德巴赫猜想特别重要呢？

王元说：“哥德巴赫猜想的重要性在于它是一个数学模型，以它作为模型，可以给数学带来新的方法、新的概念和新的理论。如果一个问题的证明不能带来新方法、新思想和新理论，那么这个问题就不重要，这样的问题多得很。”

在接下来的演讲中，王元向公众解释了哥德巴赫猜想证明为何能带动新的理论和方法的原因。

证明哥德巴赫想带动的第一个方法是“园法”。这是 1918 年，英国数学家哈代、李特伍德和印度数学家拉马努金研究哥德巴赫猜想时提出的方法。

王元说：“他们从 1918 年开始做这个方法，这是一个非常有力的方法，是堆垒数论中一个强有力的中心方法。哈代是华罗庚先生的老

师，拉马努金在印度则被神话了。还有就是指数和的估计方法，指数和的估计从高斯开始，在最近 100 年中发展得很快，原因就是哥德巴赫猜想是它的推动力之一。有了这两个方法的带动，基本上解决了哥德巴赫猜想 (2)，即每一个充分大的奇数都是三个素数之和。为什么说基本解决而不是完全解决呢，这就要完全理解‘充分大’。”

什么是“充分大”？王元说：“充分大是一个界线，大于这个界线的数则为充分大。在数学中，这个界线有时可以算出来，有时算不出来。在这里，文献资料显示，这个充分大可以算出来，是 10 的 1000 多次方，这是一个什么概念呢？现在计算机每秒的计算速度可以达到每秒 100 万亿次，这是 10 的 14 次方，10 的 20 次方则是计算机能够达到的最高上限；再给大家一个概念，整个宇宙的基本粒子有多少？我记得在一篇文章上说是 10 的 50 次方，那么，10 的 1000 次方是什么概念呢？无法想象！这是一个大得不得了数字。所以，三个素数加起来等于一个奇数，这是不能通过计算机做出来的，只能用数学的方法来证明。”

“现在，社会上只知道  $1+1$ ， $N+N$ ，忘了将‘充分大’三个字放上去，这些问题都要加上‘充分大’才行。”王元补充说。

证明哥德巴赫猜想带动的第二个方法是筛法。

王元说：“1918 年，挪威数学家布朗改进了有 2000 多年历史的埃拉多染尼氏的筛法，证明每个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过 9 的正整数之和。我们将布朗的结果记为‘9+9’。从布朗开始，筛法发展差不多 90 多年了，而且还在发展，最后结果是什么呢？最

后结果之一就是陈景润的结果。陈景润在 1965 年证明：每一个充分大的偶数可以表示为一个素数及一个不超过两个素数之积之和。这个定理可以表示为 ‘1+2’。”

“陈景润的这个定理，报纸上的宣传也好，群众的了解也好，都是不完整、不科学的。因为首先，外面大家讲的都是陈景润的 ‘1+2’，‘充分大’ 忘了；其次，大家说陈景润证明的是一个素数加上两个素数乘起来。这又错了！应该是一个素数加上一个素数或者两个素数乘起来，是不超过两个素数之积之和。所以，大众的理解是不科学的，所以我现在要给大家严格地讲一讲。” 王元说，“陈景润定理中的充分大有多大？我们只知道存在这样一个界，但不能具体给出来！”

“光辉的顶点”

华罗庚是中国最早从事哥德巴赫猜想的数学家。1936~1938 年，他赴英国剑桥大学留学，在哈代的指导下从事数论研究，并开始研究哥德巴赫猜想，取得了很好的成果，证明了对于“几乎所有”的偶数，猜想 (1) 都是正确的。

1950 年，华罗庚从美国回国，在中科院数学研究所组织数论研究讨论班，选择哥德巴赫猜想作为讨论的主题，倡议并指导他的一些学生研究这一问题。他曾对学生们说：“我并不是要你们在这个问题上作出成果来。我的着眼点是哥德巴赫猜想跟解析数论中所有的重要方法都有联系，以哥德巴赫猜想为主题来学习，将可以学会解析数论中所有的重要方法……哥德巴赫猜想真是美极了，现在还没有一个方法可以解决它。”

参加这个数论讨论班的学生有王元、潘承洞和陈景润等。出乎华罗庚的意料，学生们在哥德巴赫猜想的证明上取得了相当好的成绩。

1956年，王元证明了“ $3+4$ ”；同年，原苏联数学家阿·维诺格拉朵夫证明了“ $3+3$ ”；1957年，王元又证明了“ $2+3$ ”；潘承洞于1962年证明了“ $1+5$ ”；1963年，潘承洞、巴尔巴恩与王元又都证明了“ $1+4$ ”；1966年，陈景润在对筛法作了新的重要改进后，证明了“ $1+2$ ”。

1974年，由英国数学家哈勃斯坦和西德数学家李希特合著的《筛法》一书出版，书中以“陈氏定理”作为最后一章的标题。书中写道：

“我们本章的目的是为了证明陈景润下面的惊人定理，我们在前10章已经付印时才注意到这一结果。从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点。”

华罗庚曾对王元说：“在我的学生的作品中，最使我感动的是‘ $1+2$ ’。”

王元向大家展示了一张陈景润的照片，这是日本出版的《数学100个问题》中一张陈景润的照片。“日本数学界列举了今天数学中的100个重要问题，哥德巴赫猜想是这些问题中的重要问题之一，因为陈景润在‘ $1+1$ ’的证明中最接近最终目标，所以书中刊登了他的一张照片。这里面刊登一张照片也不容易，因为书中只有两张中国人的照片，一张是祖冲之的，一张就是陈景润的。”王元说，“当然，对数学难题的证明作出贡献只是对数学贡献的一个方面。”

王元强调：“在这里我应该说明，这个结果最后是陈景润做出来

的，但这个结果应该是 90 年来大家努力的结果，陈景润只是走出了最后一步。所以，前面的某些人在数学史上的功劳肯定要超过他，比方说，近代筛法的创始人布朗等。但最后的结果是最后一个人做出来的。如果要证明‘ $1+1$ ’，现在还比较远。”

“这一步大得不得了”

最后，王元说：“今天，我给大家讲哥德巴赫猜想，并不是想鼓吹大家来做这个事情。我没有这个意思。我给大家讲一讲，只是要让你知道这样一个数学常识，这是我的第一个目的。第二个目的，也是更重要的一点，就是我劝大家现在不要去做哥德巴赫猜想，还是把基础打好。对这个问题而言，包括陈景润在内，他辛苦了一辈子证明了‘ $1+2$ ’，是他的实力和勤奋，也是他的运气。陈景润的结果，报纸上的宣传也好，外面的说法也好，都不对头，‘充分大’没有说，这是不对的。这个问题，基础没有打好，怎么搞？对在座的各位年轻人来说，你们现在打基础很重要，如果要搞这个问题，最低限度，你应该有大学数学专业的毕业生的知识水平，并将已有的文献都看明白了才能做；否则，就是浪费时间。”

如今，王元每周还要收到几封信，写信人强迫和他讨论哥德巴赫猜想的问题。“我希望他们不要和我讨论这个问题，这个问题我已经几十年不做了，因为我觉得没有什么希望再做下去了。不要认为陈景润做出‘ $1+2$ ’，还差一步就做出‘ $1+1$ ’。是的，就是这一步；但这一步根本就大得不得了，这一步比 90 年来走过的路还要长。”王元说。

美国加州大学洛杉矶分校的华裔数学家陶哲轩是 2006 年数学菲

尔茨奖获得者之一。王元说：“陶哲轩应该是最近几十年来全世界做得最好的两位数学家之一，他的目标之一就是要证明‘1+1’，他现在做出来的结果也很好，但他在很多次报告中都讲，他的方法不可能证明‘1+1’。”

“连这么大的一个天才都没有做出来，所以，我劝大家不要做这个事，现在不是做这个证明的时候。你们还是应打好基础，把你们现在该学的解析几何、代数与几何等学好，这是最重要的。”王元说。

《科学时报》（2009-7-2 A3 专访）

#### 5. 王元院士：精英教育需要自由生长空间

<http://news.sciencenet.cn/htmlnews/2012/1/257892.shtm>

作者：雷宇 来源：中国青年报 发布时间：2012-1-2

担任过10年中国数学奥林匹克竞赛委员会主席的王元院士有些忧心：即将进小学的孙子孙女如果不喜欢自己研究了半个多世纪的数学，最后是不是仍将被迫卷入奥数培训的滚滚洪流。

每天走在中关村的大街上，这位耄耋老人放眼望去，最多的就是为应试而生的奥数补习班。

他常常现身说法寄语年轻人，一个成功的人一定是由于兴趣爱好而执著追求，才创出成绩的。

面对今天教育的按部就班重重藩篱，他呼吁要给予精英教育自由生长的空间，而他的中学时代恰是对此最好的注脚之一，尽管时代和环境已经大不相同。

距离迈进中学校园已经过去整整70年，王元回顾那些青葱岁月，

意兴盎然。

中学不需要门门考满分

王元的初中生活是在战乱与艰难中度过的。

1942年，王元考入了当时的国立二中，这所学校由扬州中学西迁四川后改名而来。

今天的资料显示，王元求学前后从扬州中学毕业的学生中走出了40余位院士。

其时的教育更趋近精英模式，一个县里也不一定有一所中学，“小学班里40人能考上初中的也就三五个。”

“当时的学习太简单，管得不多。”正是得益于这样宽松的环境，精力旺盛的王元把大量的时间花在了课外，“学了很多人文的东西”。

他喜欢看小说，不管多厚的本本，他都要想方设法看完它，《红楼梦》、《三国演义》、《儒林外史》更是看过一遍又一遍。

正是在这一时期，这个知识分子家庭里长大的孩子开始接触莎士比亚作品，从此一发不可收拾，“看过的超过了30本”。

看别人拉二胡，王元也动了心，抓紧时间苦练，又肯动脑筋琢磨演奏技巧，不久就成为出色的二胡演奏者。

后来，他又喜欢上画画和游泳。他经常带着画板出去写生。画累了，就脱下衣服跳到湖里痛痛快快地游泳。广泛的兴趣，培养了他不怕困难和强烈进取的精神。只要他感兴趣的项目，他总比别人学得好。

王元快上高二时，全国迎来了八年艰苦抗战的最终胜利。王元一家搬到了南京。

随着生活环境的不断改善，从美国漂洋过海传来的文艺电影吸引了王元的目光，那段时间，他每周必看一场，《魂断蓝桥》、《飘》、《卡萨布兰卡》、《哈姆雷特》……那些经典情节，60多年后回顾起来，依然历历在目。

整个中学时期，王元的学习成绩始终保持中等水平，“50名同学，一直排在20名左右”，即使相对不错的数学与英语，也远不是班级最好。

但对于那段远逝的年少岁月，王元坦言从来没有过后悔，“我认为中学那样学习是正确的，不需要门门考5分（当时考试满分为5分）。”

音乐和绘画的浸染让自己远离蝇头小利与数学的缘分似乎在冥冥中注定。

虽然对文艺兴趣浓厚，但王元自觉天分不够，高考第一志愿他填报的全是电机、化工一类的工科专业。

考虑到数学是冷门，王元把它放进了报考志愿的替补队伍，没想到这个保底的选择让他最终走进浙江一所并不知名的高校——浙江英士大学数学系。因此整个大一，王元都在考虑重新参加高考，“转到工科去”。

王元19岁那年，英士大学并入浙江大学，老一辈数学家陈建功、苏步青均多年执教于该校。

身体不太好、动手能力不强，王元决定一心一意研究数学，从此开始了长达半个多世纪的数学研究之旅。

24岁时，因为与波兰数学家合作的两篇论文发表，王元迎来了人

生第一次全国范围的“被宣传”，有中央媒体甚至用整版篇幅报道了这项诞生于新中国初期的国际化成果，这在当时的年轻人中绝无仅有。

相较于现在不少十佳少年、神童大学生，盛名之下顿觉飘飘然，王元当时并没有“一吹(捧)就晕了。”

“我不怕吹，因为心态成熟了，知道自己只是做了一点很小的工作”。王元说，这正是得益于当年音乐和绘画的浸染，“那些深厚的意境使人净化，让人知道最高级的享受，不会再去贪图蝇头小利”。

多年后，在很多中学里演讲，面对充满激情和梦想的青少年一代，王元常常深有感触地告诫，“中学时代一定要全面发展”。

回顾王元的道路，如果太重名利，就不会有此后长长一串华丽的成绩单。

1957年，他在哥德巴赫猜想中证明了 $2+3$ (王元证明的 $2+3$ 表示的是：每个充分大的偶数都可以表示成至多两个质数的乘积再加上至多3个质数的乘积——记者注)，这是中国学者首次在这一研究领域跃居世界领先的地位。

1973年，他与华罗庚联合证明的定理，受到国际学术界推崇，被称为华—王方法。

“当年全国宣传我的时候，我才20多岁，如果不是之后一直努力，现在80多岁了，你也不会来找我了。”这位见惯神童陨落的老人笑言。

精英教育需要自由生长空间

王元的老师华罗庚的故事在今天可能难以想象。

这个聪明而勤奋的初中生考试时，老师经常给他格外的“优待”，“你出去玩吧，今天的考试题目太容易了，你就不要考了”。

类似的“优待”还包括，这个有点跛脚的 19 岁青年凭借一篇论文被请到清华大学工作。

循此道路，没有念过高中的华罗庚一步步走向科学殿堂，最终成为中国最有名的数学家。

为什么我国今天出不了钱学森、华罗庚这样的大科学家，王元认为，华罗庚的故事给人启示。

在王元看来，随着义务教育的普及，我国“有教无类”做得越来越好，能够进入学校的人数远远超越自己当年那个时代，但“因材施教”远远不够，“必须承认智慧的差别，允许精英脱颖而出”。

“孔子三千弟子，也只有七十二贤人，就是 100 人里只有 2.4 个人是英才，需要因材施教”。王元介绍，西方国家的教育重视英才，因为造福国家、重点创新要靠英才。

与之相对的是，我国对于英才培养重视不够，7 岁的孩子，有的只有 4 岁的智力，有的早就超过了，按部就班一级级的上学制度和考试制度，对优秀的人才是一种藩篱，“就像穿一样的衣服、吃一样的饭、读一样的书，变成了要齐步走，最后只有向落后看齐，好的学生被扼杀掉了”。

哥伦比亚大学数学系教授张寿武曾师从王元。

当时，王元认为自己的研究领域经典解析数论已无出路可言，但看中了他的勤勉和悟性，鼓励他自由选择方向。

张寿武硕士论文答辩时，王元在其答辩完成后说，“我们也不知道你在说些什么，一个字也听不懂，但考虑到你每天很早就来办公室，很用功，这个硕士学位就送给你了，以后就不能够蒙了。”

至今，这位美国艺术与科学院新科院士常常庆幸，有这样一位老师能赋予自己充分信任，给予了自己足够自由的空间。

王元则谦称，自己从没有教过张寿武，也没有跟他谈过数学，但张寿武最大的幸运是自己理解他，“不是像有些老师，必须要学生干什么。”

不是英才非要按照英才培养同样糟糕。

王元常常为一个个案唏嘘：自己认识的一个人，小学时家长让念中学的东西，中学时念大学的东西，早早到美国某名牌大学拿到博士学位，遗憾的是，毕业几十年没有一点创新。