数学如诗，境界为上

王国维在《人间词话》中提出："词以境界为最上。有境界自成高格，自有名句。"他说："有造境，有写境，此'理想'与'写实'二派之所由分。"按我理解，"造境"是以意念和想象为境，"写境"是描写现实的景物。王国维还把艺术家分为"写实家"和"理想家"，并认为这两者是相通的。他还写道："诗人对宇宙人生，须入乎其内，又须出乎其外。入乎其内，故能写之。出乎其外，故能观之。入乎其内，故有生气。出乎其外，故有高致。"

数学家维纳说："数学是一门精美的艺术"。我认为，数学如同诗歌，评价一项数学成就，也应以境界为上。数学上也有"造境"与"写境"之分，前者是"创造理论"，后者是"解决难题"。数学家也有"写实家"和"理想家"之分，前者是"入乎其内"，侧重应用数学；后者是"出乎其外"，侧重纯粹数学，但两者是互通的。

数学与诗歌有许多共性，下面归纳为八点。

第一，数学和诗歌的源泉都是自然和社会。数学史家克莱因认为："对自然的深入研究是数学发现最丰富的源泉。"

第二，数学和诗歌都追求和谐与简洁。诗歌是力图通过简洁的语言和韵律，抒发诗人的情怀，表达深邃的哲理。数学的和谐是不言而喻的。至于数学的简洁，一方面数学结果是通过简明的命题或定理的形式来表述的；另一方面，在研究过程中，数学家追求在较少条件下推出尽可能广泛而深刻的结论，或者力图简化已有结果的证明。

第三，数学中的"对偶"与诗词中的"对仗"是异曲同工。诗词中的"对仗"能使意境更加优美，抒情更加感人，哲理更加深邃。数学中的"对偶"使得数学理论变得更加深刻，更加优美。数学中的"对偶"不只是数学的结构和框架，而且是一种思维方式，也是重要的证明工具和技巧。

第四，数学和诗歌的创作都需要直觉和想象力。所谓直觉，就是没有经过意识推理而对某事物产生的理解和判断。当然，任何科学和艺术的创作都需要直觉和想象力，但数学和诗歌更为突出。例如，李白《望庐山瀑布》中诗句"飞流直下三千尺，疑是银河落九天"就极富直觉和想象。这种直觉和想象是源于诗人的形象思维。数学史家克莱因说："在预测能被证明的内容时，和构思证明的方法时一样，数学家们利用高度的直觉和想象。"法国著名数学家庞加莱认为："我们靠逻辑来证明，但要靠直觉来发明。"这里的"发明"就是指提出问题和构思证明的方法。

第五，诗歌创作和数学研究都需要激情和灵感。诗人有了激情才能把自己的感悟加深和放大，把内心情感宣泄出来，作品才能打动人和感染人。对数学研究来说，激情来自于探求未知真理的好奇和对美的追求。灵感也叫顿悟，它是一种近乎无意识或潜意识的非逻辑式的创造性思维活动。灵感是对某一问题长期思考

以后突然产生的思想火花，有时产生于全神贯注思考问题之际，有时却是在不经意间或意识蒙胧之中。灵感有时也来源于对不同现象的类比和联想。

第六，数学研究和诗歌创作都需要有美感。法国数学家庞加莱在《数学创造》一文中形象地描述了数学美感在数学创造过程中的作用，他说："各种数学概念在潜意识里碰撞组合，数学直觉从中筛选有意义的组合，进而进行创造。……潜意识做出选择时，所用的标准便是数学的美感，数和形的和谐感，几何学的雅致感。"数学史家克莱因认为："进行数学创造的最主要驱动力是对美的追求。"

第七，"创新"是数学和诗歌的共同美学准则（即评价标准）。艺术家把"创新"叫作艺术风格。例如，李白的诗"豪迈奔放，飘逸若仙"，是浪漫主义风格；杜甫的诗则"深沉蕴蓄，抑扬曲折"，是现实主义风格。对数学研究而言，创新必须是在一定科学范围内有比较重要的意义。

第八，数学和诗歌的另一共同美学准则就是《人间词话》中所说的"境界为上"。数学的境界包括：1）大道至简，大美天成；2）简洁、和谐、对称、雅致；3）颠覆性的创新；4）交叉、融合、统一。

下面举几个高境界的数学例子。首先是两个美妙的数学公式。一是欧拉公式 eiπ+1=0，它把数学里面最基本的几个要素全都整合在一块了，其中 1 是自然数的单位，0 是正负数的分界点，e 是自然对数的底，π 是圆周率，i 是虚数单位。二是欧拉公式 V+F-E=2，公式表明：任何一个简单凸多面体，它的顶点数 V 加上面数 F，减去棱数 E 必定等于 2。这两个欧拉公式堪称"大道至简、大美天成"的数学公式。

数论中的三个著名猜想："哥德巴赫猜想"（任何大于 2 的偶数可以表为两个素数之和）、"孪生数猜想"（存在无穷多对素数其差等于 2）和"黎曼猜想"（黎曼 ζ 函数所有非平凡零点都位于复平面中实部为 1/2 的直线上），更是高境界数学的例子，尽管它们都还没有得到证明。又如庞加莱猜想、费尔马大定理、四色定理、伽罗瓦群论、黎曼几何、哥德尔不完备定理、伊藤清的随机分析、香农信息论等，这些都是属于"简洁、和谐、对称、雅致"高境界数学的例子。

20 世纪 50、60 年代，格罗滕迪克对代数几何进行了彻底的革命，建立了"概形理论"，堪称一项颠覆性的创新。他因此于 1966 年获得菲尔兹奖。在概形理论基础上，数学家们取得了一系列杰出成就：1973 年，德利涅证明了韦伊猜想（1978 年获菲尔兹奖）； 1983 年，法尔廷斯证明了莫德尔猜想（1986 年获菲尔兹奖）；1995 年，怀尔斯证明了费马大定理（1996 年获菲尔兹特别奖）。

关于"交叉、融合、统一"这一数学境界，我举两个例子。其一是 Atiyah-Singer 指标定理：紧流形上的椭圆偏微分算子的解析指标（与解空间的维度相关）等于拓扑指标（决定于流形的拓扑性状）。其二是朗兰兹纲领，它是将数学中某些表面上毫不相干的领域（数论、代数几何与约化群表示理论）建立一种本质联系的构想。纲领是由朗兰兹在 1967 年给韦伊的一封信件中提出的。法籍越南数学家吴宝珠因证明朗兰兹纲领基本引理获得了 2010 年菲尔兹奖，朗兰兹本人获 2018

年度阿贝尔奖（编者注：为纪念挪威数学家尼尔斯·亨利克·阿贝尔设立的数学奖，每年颁发一次）。

我本人是研究概率论与随机分析的。我曾试图用诗歌来解析我的专业内涵，写过一首“悟道诗”：

随机非随意，概率破玄机。

无序隐有序，统计解迷离。

下面是我的另一首有关概率论的科学诗《随机与概率》，希望能引起大家对概率论的关注和兴趣。

随机与概率

熙熙人群朋友不期而遇，茫茫宇宙陨星意外撞击。

随机事件发生并非随意，概率破解其中奥秘玄机。

情境重复催生稀有事件，历史长河沉淀自然奇迹。

同班同学常有生日相同，彩民两次中奖并不神奇。

抵押贷款房产汽车按揭，精巧设计需要借助概率。

保费计算基于概率模型，期权定价有赖随机分析。

概率技巧有助破解密码，人工智能需用概率逻辑。

日常生活常遇概率问题，学点概率知识终身受益。

来源：《光明日报》（ 2021 年 12 月 23 日 16 版）