数学的机械化*

十六、七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代。几百年后的今天，正如敬爱的周总理早在 1956 年就指出的那样，电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕。数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场 新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色。为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，就应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析。

一、什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经“机械化”，也就是说已实现了刻板化或规格化。正因为割麦、刈草、纺纱织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据以造出割麦机、刈草机、纺纱机织布机来。也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得 17 世纪的法国数学家巴斯喀，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机——加法机，并由莱布尼茨改进成为也

---

*本文摘自《百科知识》，1980 年。

能进行乘法的机器。数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论。

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题。除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子。在新编高中数学课本中，介绍了现代数学鼻祖高斯（德国人，1777～1855）解线性方程组的一种“消去法”，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程。根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算自然是不可能的。如果用手工计算，即使是解只有三、四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的。现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，往往可归结为求解很多未知数的线性方程组。这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用。

即使是不专门研究数学的人们，也大都知道，数学的脑力劳动有两种主要形式：数值计算与定理证明（或许还应包括公式推导，但这终究是次要的）。著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇《向机械化数学前进》的有名文章中，曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点。我们可以简略而概括地把它们对比一下：

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算，如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组，其所以虽繁而易，根本原因正在于它已经机械化。而证明的巧而难，是大家都深有体会的，其根本原因也正在于它并没有机械化。例如，我们在中学初等几何定理的证明中，就经常要依靠诸如直观、洞察、经验，以及其他一些模糊不清的原则，去寻找捷径。

二、从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是：定理的证明是不是也能象计算那样机械化，因而把巧而难的证明，化为计算那样虽繁而易的劳动呢？事实上，这一证明机械化的设想，并不始自今日，它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家莱布尼茨所具有。只是直到 19 世纪末，希尔伯特（德国数学家，1862～1943）等创立并发展了数理逻辑以来，这一设想才有了明确的数学形式。又由于 40 年代电子计算机的出现，才使这一设想的实现有了现实可能性。

从本世纪二、三十年代以来，数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性，进行了大量的理论探讨，他们的结果大都是否定的。例如哥德尔（Godel）等人的一条著名定理就说，即使看来最简单的初等数论这一范围，它的定理证明的机械化也是不可能的。另一面，1950 年波兰数学家塔斯基（Tarski）则证明了初等几何（以及初等代数）这一范围的定理证明，却是可以机械化的。只是塔斯基的结果近于例外，在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的，即机械化是不可能的。

1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试。1959 年王浩先生设计了一个机械化方法，用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理，只

用了9分钟，在数学与数理逻辑学界引起了轰动。有一时机器证明的前景似乎非常乐观。例如1958年时就有人曾经预测：在10年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理。还有人认为，如果这样，则不仅许多著名哲学家与数学家如庞阿诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及杜灵等人的梦想得以实现，而且计算将成为科学的皇后，人类的主人！

然而，事情的发展却并不如预期那样美好。尽管在1976年时，美国的哈肯等人，在高速计算机上用了1，200小时的计算时间，解决了数学家们100多年来所未能解决的一个著名难题——四色问题*，因此而轰动一时，但是，这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力，还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明。用王浩先生的说法，哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证，它只适用于四色这一特殊的定理，这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别。后者才真正体现了机械化定理证明，进而实现机器证明的实质。另一面，在真正的机械化证明方面，虽然泰斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的，还提出了据以造判定机也即是证明机的设想，但实际上他们的机械化方法非常繁，繁到不可收拾，因而远远不是切实可行的。1976年时，美国做了许多在计算机上证明定理的实验，在泰斯基的初等几何范围内，用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的“儿戏式”的“定理”。因此，有些专家曾经发出过这样悲观的论调：如果专依靠机器，则再过100年也未必能证明出多少有意义的新定理来。

---

* 1852年英国人格斯里克（Guthric）提出的猜测：“就地图着色而言，四色是足够的。也就是说，对于任何一幅地图着色，只需四种颜色，就足以使得所有相邻地区的颜色不致重复。

三、一条切实可行的道路

1976 年冬，正值四人帮垮台之际，我们开始了定理证明机械化的研究。1977 年春取得了初步成果，证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化。在理论上说来，我们的结果已包括在泰斯基的定理之中。但与塔斯基的结果不同，我们的机械化方法是切实可行的，即使用手算，也可以证明一些艰深的定理。

我们的方法主要分两步，第一步是引进坐标，然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示。我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围，例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此。这一步可以叫做几何的代数化。第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去，如果消去的结果为零，即表明定理正确，否则再作进一步检查。这一步完全是代数的，即用多项式的消元法来验证。

上述两步都可以机械与刻板地进行。根据我们的机械化方法编成程序，以在计算机上实现机器证明，并无实质上的困难。事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过。我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像西姆森线* 那样不算简单的定理。1978 年初，我们又证明了初等微分几何中主要的一类定理证明也可以机械化。而且这种机械化方法也是切实可行的，并据此用手算证明了不算简单的一些定理。

从我们的工作中可以看出，定理的机械化证明，往往极度

* 从圆周上任一点向圆内接三角形的三条边做垂线，三垂足必在一条直线上，这条直线叫西姆森线，这条定理叫西姆森定理。

繁复，与通常既简且妙的证明形成对照，这种以量的复杂来换取质的困难，正是利用计算机所需要的。

在电子计算机如此发展的今天，把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难，而且有一台微型的台式机也就够了。就像我们曾经使用过的长城203，它的存数最多只能到234个10进位的12位数，就已能用以证明西姆逊线那样的定理。目前内存简单的所谓个人用微型机，已到32K以至64K字节。稍高级的已到256K以至400多K字节，而且随着超大规模集成电路与其它技术的出现与改进，微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大，功能愈来愈多，自动化的程度也愈来愈高。用不着到20世纪末，这一类方便的小型机器就可为广大群众普遍使用。它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器，而且还可用以发现并证明一些艰深的定理，而这种定理的发现与证明，在数学研究手工业式的过去，将是不可想象的。

应该指出，目前我们所能证明的定理，局限于已经发现的机械化方法的范围，例如初等几何与初等微分几何之内。而如何超出与扩大这些机械化的范围，则是今后需要探索的长期的理论性工作。

四、历史的启示与未来的技术革命

作为结束，我们提出几点看法。

首先，成功的机械化方法并非始自这几年。约在一年以前，我们发现早在1899年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中，就有着一条真正的正面的机械化定理：初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化。当然，原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的，也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识，自然更不见

得有其他人提到过这一定理的机械化内容。希尔伯特这一名著是以公理化的典范而著称于世的，但我认为，该书更重要之处，是在于提供了一条从公理化出发，通过代数化以到达机械化的道路。自然，处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里，公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展，而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的。但在电子计算机已日益普及，因而繁琐而重复的大量计算已成为不足道的现代，机械化的思想应比公理化思想受到更大重视，似乎是合乎实际的。

其次应该着重指出，我们从事机械化定理证明工作获得成果之前，对泰斯基的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系。我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的。

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学。四则运算与开方的机械化算法由来已久。汉初完成的《九章算术》中，对开平、立方的机械化过程，就有详细说明，到宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法。在《九章算术》中还有着各种线性联立方程组的问题与解法以及正负数的概念，在魏晋时刘徽的《九章算术》注中，说明了几种机械的消去法及其详细的机械化算法过程。把刘注的说明列成图表，即与前面所提到的中学课本中所列高斯消去法的那些图表无异，宋代秦九韶《数书九章》中，更有着颇为繁复的算题与详细图表。沈康身同志所著的《中国数学史略》，在这方面做了详细介绍。

在宋元时代，我国就创立了“天元术”，引进了天元，以及天元、地元、人元、物元等相当于现代未知数的概念，把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题。这一方法用于几何可称为几何的代数化。12 世纪的刘益将新法与“古法”比较，称“省功数倍”。与之相伴而生，又引进

了相当于现代多项式的概念，建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具，使几何代数化的方法得到了有系统的发展，具见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中。几何的代数化是解析几何的前身，这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰。可以说，当时我国已到达了解析几何与微积分的大门，具备了创立这些数学关键领域的条件，但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来。几百年的停顿，使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家。然而，我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的。作者本人关于数学机械化的研究工作，就是在这些思想与成就启发之下的产物，它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承。

恩格斯曾经指出，枪炮的出现消除了体力上的差别，使中世纪的骑士阶级从此消声匿迹，为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件。近年有些计算机科学家指出，个人用计算机的出现，其冲击作用可与枪炮的出现相比。枪炮使人们在体力上难分强弱，而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁。又有人对数学的未来提出看法，认为计算机的出现，将使数学现在一张纸一支笔的方法，在历史的长河中，无异于石器时代的工业方法。今天的数学家们，不得不面对计算机的挑战，但是，也不必妄自菲薄。大量繁复的事情交给计算机去做了，人脑将仍然从事富有创造性的劳动。

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队，以致造成现在的落后状态。在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中，我们不能重蹈覆辙。数学是一种典型的脑力劳动，它的机械化有着许多其它类型脑力劳动所不及的有利条件。周总理的遗愿，我国古代数学的光辉，都鼓舞着我们为实现数学的机械化，在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前。