

# 师从吴先生 **学习** 和 **研究** 数学机械化

■ 李洪波

我初识吴文俊先生是1991年春季在南开大学举办的为期三个月的数学机械化讲习班上。这个讲习班是陈省身先生组织的一系列数学讲习班之一，目的在于集中培训我国有志于数学机械化事业的青年数学人才。这也是我第一次接触并被领进数学机械化这一新兴领域。当时的主讲教师有石赫、黄文奇、袁仁保等，讲座教师有吴先生、刘卓军、高小山等。可以说吴先生是亲自将我领进数学机械化大门的几位主要老师之一。

我对数学机械化的认识是在问题表述的符号化基础上，以计算（或者叫代数处理）的手段进行数学推导，实现相比数理逻辑而言更为高级有效的自动推理。数学的公理化为数学的基础注入了严密性，

但是并没有关注基于公理的推理实际可实现性，因为没有考虑推理的效率问题。实际上，人工智能在开始的时候，首先考虑的是逻辑推理的计算机算法化，以数学定理证明为重要的检验和应用对象之一。对于几何问题，最典型的欧几里德演绎方法是逻辑推理，但是在程序实现时，对代换规则的搜索迅速导致搜索空间的指数膨胀，因此只能证明诸如“等腰三角形的底边中线垂直于底”之类平凡的定理，对稍微复杂的命题实际上无能为力。

吴先生数学机械化方法的出现改变了这一面貌，实际上他一个人使几何定理机器证明从人工智能中的一个不太成功的领域变为最为成功的领域之一。从基于逻辑的程序化证明到基于代数的程序化证明，恰好遵循了经典几何从图形构造到坐标描述，从综合演绎到解析计算，从特殊技巧到普适规律的发展历史。对于几何推理的坐标化和计算化，吴先生从理论上证明了他建立的机械化算法的完全性，从他身体力行的程序实现中检验了这种机械化算法相比以往算法的高效性。

自解析几何发明以来，除了笛卡尔坐标，还出现了平面复数坐标，三维向量代数，以及 $n$ 维矩阵和张量等在几何中卓为有效的代数工具。我本人的硕士阶段研究背景是理性力学，师从北京大学数学系郭仲衡院士，对张量分析和广义坐标在黎曼几何和李群中的重要作用有深刻的印象。自然考虑的一个问题，是如何将吴先生数学机械化的思想和算法推广到这些出现更晚、但功能更强的代数系统中去，解决更高层次几何定理的证明问题。

先看看向量代数。这是19世纪 Gibbs 从 Hamilton 的四元数演算中提取出来的，受到工程师们热烈欢迎的三维几何描述和计算工具。单位向量之间的乘法有内积、叉积、混合积（又叫体积），分别表示两个向量夹角的余弦，垂直于二向量的法向量乘以夹角的正弦，三个向量张成的平行六面体体积。它们的几何意义十分明确。如果说有什么不满意的话，除了该代数只适用于二维和三维几何，就是解向量方程并不方便。原因是这三种乘法不同于数的乘法，它们是

没有可逆性的，使得连简单的线性向量方程组一般都不能在向量代数中进行求解，一般也就只能用待定系数求出关于一组基向量的线性组合（坐标表示）。

造成这种困难的原因是 Gibbs 摒弃了 Hamilton 的四元数乘法，只采纳了它的内积和叉积两部分。一个三维向量对应于一个纯虚四元数，两个四元数的乘积分为两部分：实数部分（内积）和纯虚数部分（外积）。分开的两部分有明确的几何意义，而作为它们的和的四元数乘积，对 Gibbs 来说没有明确的几何意义，因此被摒弃。现在来看，两个纯虚四元数的乘积当然是有几何意义的，不过它不再表示任何几何量（例如内积或角度）和几何体（例如法向量），而是表示几何变换：它是这两个纯虚四元数表示的向量从一个旋转到另一个，以它们的叉积为转轴向量的三维空间旋转的生成元，既包含了转角又包含了转轴。四元数乘积是有可逆性的，在向量方程组求解这一方面比向量代数具有优越性。事实上，单位四元数集和向量代数一个是李群（三维旋转的二重覆盖：spin 群），另一个是相应的李代数。

再看看四元数的高维推广。四元数域是满足结合律的，其中任意两个纯虚四元数的乘积等于它们对应的三维欧氏向量的内积的负值（这个负号也是 Gibbs 摒弃四元数乘法的原因之一）。一方面，Frobenius 证明了如果试图保持非零元素的可逆性，那么四元数的高维推广只有八元数，后者的乘法已经丧失了结合律。另一方面，如果试图保持结合律，并坚持任意两个向量的乘积等于它们的内积（而不是其负值），就得到唯一的多重线性万有代数，它就是 Clifford 代数，而四元数是三维空间上的 Clifford 代数的偶子代数。19 世纪的 Clifford 本人称现在冠以他的名字的代数为“几何代数”，意思是这种代数为几何描述和计算服务的。

众所周知，张量积只具有多重线性和结合律两个性质，张量代数是满足这两个性质的万有代数。张量积不足以刻画空间的维数性质和度量性质。在历史上，向量空间的维数性质是由线性相关性，

或者更明确地，是由向量的Grassmann外积刻画的。这种外积反交换，分阶，并满足结合律，与向量代数中的叉积不同。 $n$ 维向量空间中的任意 $n+1$ 个向量线性相关，在代数上的反映就是它们的外积为零。Grassmann代数是向量的Grassmann外积生成的，是满足多重线性、反交换、结合律的万有代数。

外积是不具有可逆性的。相比之下，Clifford代数中的乘积，简称Clifford乘积，对该代数中的几乎所有元素都是可逆的。任意两个向量的Clifford乘积是它们的内积和外积之和。这种乘积同时包含了空间的维数性质和度量性质，非常适宜于对度量几何进行描述和计算，特别是向量方程组求解。

以上是我在博士阶段对数学机械化入门之后，结合自己的张量分析背景对进一步发展数学机械化思想和技术进行的思索。由于吴先生的机器证明在经典几何问题上已经取得很大的成功，一个自然的思想是发展出基于Clifford代数的向量方程组求解方法，针对几何定理的代数证明计算量大，证明过程不可读的问题，看看是否能够有所克服。经过两年多的努力，终于提出了一套适用于几何定理证明的向量方程组求解方法。测试表明，该方法产生的证明具有一定的可读性。这些是我的博士学位论文“几何定理机器证明的新探讨”的核心内容。

吴先生对论文的学术评语如下：“本文对几何定理证明有许多创新。与原来机器证明方法依赖于通常坐标系统与多项式运算相反，作者巧妙地使用各种Clifford代数，使定理的表述不再依赖于坐标的选择而变为intrinsic的，且使证明过程往往变得极为简单。由于Clifford代数的表达本身已具有某种方向性，因而某些原来的方法所感到难于处理的定理，也成为简易可行。在平面几何情形，作者指出所用方法包括了……Havel的距离法。但作者的方法也可使用于投影几何甚至微分几何，为以上方法所远不能及。微分几何的定理证明甚少进展，作者方法将有较大推进。论文证明作者思想敏捷富于创新，作者所开创的局面将大有发展余地。这是一篇极为优秀的博士论文。”

博士学位论文的同行评议一般只要有5个就够了。当时我的导师程民德院士认为应适当扩大该工作的影响，因此总共邀请了15位专家进行同行评议。他们是吴文俊、程民德、丁石孙、姜伯驹、石青云、李未、张景中、杨路、林建祥、徐明耀、杨东屏、黄且圆、彭立中、石赫、白硕。其中，吴先生任我的博士学位论文答辩委员会主席。

1994年博士毕业后我来到中科院系统所，在吴先生的指导下继续进行数学机械化的研究。1996-1998年我赴美访问Clifford代数研究最有影响的一位学者Hestenes教授，与他合作研究他二十年前就开始，但始终未能有效解决的问题：晶体群的Clifford代数表示。吴先生对我的出国留学表示支持，认为Hestenes作为Clifford代数方面的“教父”级人物，我联系他并去那里与之合作，有利于对我研究水平的提高，是最自然的事情。也就是在这段时间，我与Hestenes等合作建立了共形几何代数，不仅解决了晶体群的Clifford代数表示，而且为经典几何引入了统一的几何代数语言。1998年，在吴先生、高小山等的大力支持下，我应聘百人计划回国，继续从事数学机械化研究。

共形几何代数为进一步提高经典几何定理证明的效率提供了有力工具。传统的 $n$ 维欧氏几何模型建立在 $R^n$ 基础上，空间任意一点用自原点出发的向量表示，同一向量还表示自原点到该点的位移。其他两点之间的位移用表示这两点的向量之间的差来表示。我们知道，一个差分单项式 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_k-b_k)$ 的展开立刻造成项数的指数膨胀。同样，描述位移之间几何关系的向量差分的乘积，如果展开也会造成项数的指数膨胀。与此相反，如果位移能够以某种乘法的形式表示，则不必进行展开计算，从而使项数膨胀得到控制。共形几何代数提供的正是这种表示。

共形几何代数为经典几何提供了高级不变量系统：零括号代数和零Grassmann-Cayley代数。由于能够有效地控制项数膨胀，同时保持了计算结果的几何解释，高级不变量系统在经典几何定理证明中表现突出：以往数十万项都难以完成的计算，现在常常只要一、两项就可

以完成，极大地提高了机器证明的效率。吴先生对此非常赏识，要我提供所有我的相关论文，亲自研究这一新兴工具。他并且坚决支持我申请各种学术奖励，为此写过多封推荐信。

吴先生是学术泰斗，在拓扑学、代数几何、机器证明和数学史等方面有很深的造诣。2002年，美国Hestenes教授来京，我陪同他去吴先生家里进行拜访。Hestenes的父亲老Hestenes曾经是加州大学洛杉矶分校数学系的系主任，是共轭梯度法的发明人、变分学专家。Hestenes是物理教育学家，同时继承了他父亲的许多数学才智，因此认为自己的1/3是物理学家，1/3是数学家，1/3是哲学家。他于2002年获得美国奥斯特(Oersted)奖章，表彰他在物理教育领域的终身成就。Hestenes对数学史很有研究，与吴先生谈得很热烈，对中国数学史和有关的原始文献出处很有兴趣。他在交谈中，对吴先生产生由衷的敬佩，两眼放光地重复了两次这么一句让我吃惊的话：“You look like my father.”

吴先生与Hestenes教授都曾经当过我的学术导师。Hestenes对我的欣赏和支持，在国际Clifford代数界是众所周知的，被国际友人戏称为我的“father”。的确，他比我的父亲只大两岁。既然他认为吴先生像是他的父亲，那么顺理推来，我与吴先生的关系就像是与父亲的父亲的关系了。

在吴先生身边工作受益极大，能够切身感受他的言传身教，不仅在科研工作上得到先生的帮助和支持，而且在做人做事的思想方面也得到教诲。我感触最深的一件事是1999年5月中旬，吴先生在他的80岁华诞晚宴上的一番讲话。1999年是国际政治舞台风云突变的一年。以美国为首的北约部队悍然入侵南斯拉夫，大肆狂轰滥炸，令人发指的是在5月8日，竟然从本土出动战略轰炸部队，对我国驻南斯拉夫大使馆进行毁灭性攻击，导弹在穿透六层楼板后直达地下室，造成在那里躲避空袭的使馆人员的重大伤亡，是赤裸裸的不宣而战！

吴先生的讲话大约是在轰炸使馆的战争行为发生一周以后。先生讲话的大意是，他生于1919年，正是五四运动爆发的那年。虽然他沒有赶上五四运动，但是后来赶上了多次爱国志士为了民族独立、为了中国人民摆脱帝国主义的侵略和压迫而进行的前仆后继的奋斗抗争行动。1949年建国后，又进行了抗美援朝、中苏边境反击战，可以说中国人民从此站起来了！之后80年代改革开放，经济方面与帝国主义国家合作，政治方面除意识形态外，其他方面也未感受到来自帝国主义国家的强烈敌对，长治久安下的人们也逐渐习惯于这种表面上的和睦亲善。这次轰炸使馆的行径，震醒了中国人民，使我们突然意识到，中国人民依然没有摆脱帝国主义的侵略和压迫，五四运动的使命依然尚未完成。我们是要继续完成这一使命的！

迄今吴先生讲话时表情由沉稳到激动、越说胸中越气愤难平的样子依然清晰地浮现在我的脑海中。吴先生今年已过了90岁华诞，他们那一辈未完成的志愿，看来是要留在我们这一辈甚至是我们的下和下一代来完成了。我们要以从政治、经济到科技诸方面，都摆脱帝国主义的侵略和压迫为目标，以此未完成的使命自勉而努力完成之。

2009年6月于北京新科祥园  
(作者为中科院数学与系统科学研究院研究员)