

# 用《吴方法》研究 数学物理问题

■ 王世坤 吴可 费少明

上世纪八十年代中期，国际数学物理的研究热点是弦理论——统一四种力相互作用的一种理论。当时，我们也卷入了这一研究浪潮，深入了解了吴示性类、惠特尼 (Whitney) 示性类可由吴示性类表示的吴第一公式和表达示性类之间关系的吴第二公式。尽管我们很早就知道吴文俊院士在拓扑学领域做出了奠基性贡献，是国际上非常著名的拓扑学家，但是看到许多关于弦理论研究的文章引用吴先生的这些经典结果，我们仍然感到惊异和激动，因为中国国内学者早期的工作能在弦理论的研究中被引用，极为罕见。我们对吴先生更加钦佩，满怀敬仰。但是也颇觉不解，文化大革命之后，吴先生为什么没有继续拓扑学的研究呢？

上世纪九十年代初的一天，中科院理论物理研究所通知有一个学术报告：《数学机械化》，报告人是吴文俊院士。“数学机械化？什么是数学机械化？和拓扑有什么关系？”我们有些疑问，也有些好奇，但是我们深知，聆听数学大师的报告，必有收获和启发。

吴先生的报告是在夏末秋初，天气不冷不热，报告厅内座无虚席，吴先生神采奕奕，满怀热情地介绍了数学机械化。聆听这个报告，虽然我们还未能深刻了解吴先生的数学机械化思想的重要意义和在科学技术中的作用，但是我们初步理解了吴先生在开创一个新兴的研究领域，将对数学的发展和應用有深远的影响，值得他中断拓扑学的研究，全身心地投入这项事业。这是我们第一次听吴先生的报告，第一次学习吴先生数学机械化的理论和方法，真是受益匪浅，从此我们就和数学机械化有了不解之缘，不断受益，极大地影响了我们关于数学物理的研究。

吴先生的报告，使我们初步理解了数学机械化的理论和方法。中国传统数学强调构造性和算法化，注意解方程和解决科学实验和生产实践中提出的各类问题，例如：许多问题的条件相当于一组多项式方程  $F_1=0, \dots, F_s=0$ ，要解决的问题相当于一个多项式方程  $G=0$ 。吴先生将中国传统数学的思想概括为机械化思想，吸取和发扬其精华，创造性地给出了多项式的零点结构定理，以此为基础给出了一个机械化方法——“吴消元法”，或称《吴方法》：即在有限步之内给出一组非退化条件多项式  $D_1, \dots, D_r$ ，并以“吴消元法”在有限步之内，判定在非退化条件  $D_1 \neq 0, \dots, D_r \neq 0$  下， $G=0$  是否可从  $F_1=0, \dots, F_s=0$  推出。“吴消元法”已成为求解代数方程组最完整和有效的方法之一。

那段时期，我们正在从事量子群的研究。量子群是形变的群，一个群的正则函数是余交换的霍普夫 (Hopf) 代数，余乘法不交换的霍普夫代数范畴的反范畴是量子群。当时量子群是一个新兴的研究领域，和杨—巴克斯 (Yang-Baxter) 方程联系紧密，而杨—巴克斯方程

是1967年由杨振宁教授在研究一维 $\delta$ 势的费米子模型时，作为系统可积性条件提出的一个矩阵方程：

$$R_{12}(x, y)R_{23}(x, z)R_{12}(y, z) = R_{23}(y, z)R_{12}(x, z)R_{23}(x, y), \quad (*)$$

方程(\*)中， $R_{12}(x, y)$ 是一个 $N$ 阶单位方阵从右边和一个 $N^2$ 阶方阵 $R(x, y)$ 的张量积， $R_{23}(x, y)$ 是一个 $N$ 阶单位方阵从左边和一个 $N^2$ 阶方阵 $R(x, y)$ 的张量积，即 $R_{12} = R(x, y) \otimes E$ ， $R_{23} = E \otimes R(x, y)$ ， $E$ 是单位方阵， $x$ 和 $y$ 是 $k$ 维向量，称为参数。这是一个非常著名的数学物理方程，它广泛涉及许多物理和数学分支，有极为重要的应用。在数学物理领域中，杨—巴克斯方程被认为是可积性的定义关系式，它所起的作用是从局域的性质给出整体的结果，使统计物理、统计模型、低维场论、二维经典和量子可积系统等领域一些问题可解或者变得简单。杨—巴克斯方程的中心问题是求解，求满足(\*)的 $R(x, y)$ 矩阵？但是，如果我们用矩阵分量表示这个矩阵方程，则是 $N^6$ 个函数方程，即便 $N=2$ ，也有64个方程，求解非常非常困难。在七十和八十年代，前苏联学派和日本京都学派为了求解杨—巴克斯方程，建立和发展了量子李代数的理论，利用量子包络代数的表示构造了一些解。在具体的统计物理或者模型的研究中，人们也给出了一些特解。但是，当时所有的基于代数表示理论的求解杨—巴克斯方程均是孤立的，没有普适的方法，也不能判断当固定 $R(x, y)$ 矩阵的阶数时，杨—巴克斯方程的解是否已经完整，参数 $(x, y)$ 是否完全？

吴先生的报告使我们顿开茅塞，使我们很快醒悟到数学机械化尤其是《吴方法》将为数学物理的研究提供强有力的手段，可以应用于求解杨—巴克斯方程。当 $R(x, y)$ 矩阵元不依赖 $(x, y)$ 时，杨—巴克斯方程就是一组多项式方程，称为通常的杨—巴克斯方程。很快，费少明、石赫教授和理论物理所的郭汉英教授就用《吴方法》得到了 $N$ 等于2的通常杨—巴克斯方程的所有的解，非常成功，鼓舞了我

们的信心，加深了我们对《吴方法》的理解。随后，我们进一步应用《吴方法》和结合一些代数几何的理论，给出了自旋为二分之一的八顶角和七顶角的带参数的杨-巴克斯方程的解，对解做了分类，讨论了它们在物理中的应用。并且，应用《零点结构定理》证明了解的完备性和参数完全性，即给出了全部解和全部参数。这些工作是我们2001年获得中科院自然科学二等奖的一项主要研究。这项工作表明《吴方法》是求解杨-巴克斯方程普适的方法，远比其它方法有力和有效。《吴方法》的核心是可以机械化地求解多项式系统、微分多项式系统和差分系统，数学物理研究中很多问题可以归结为代数方程、微分方程和差分方程，《吴方法》为这些问题的解决提供了有力的工具。自上世纪九十年代起，我们还应用《吴方法》研究其它一些数学物理问题，例如：共形空间上的场方程、离散可积系统和量子信息等等，极大地促进了我们关于数学物理的研究。

自上世纪九十年代初数学机械化研究中心成立以来，我们经常参加中心的活动，参加以中心为主要研究单位的攀登计划，参加以高小山为首席科学家的973国家重大基础研究项目，和吴先生有较多的接触。让我们非常感动的是，无论是中心还是攀登计划以及973举办的活动，高龄的吴先生总是亲临研讨会或者总结会，专心倾听学术报告和工作总结，对于他不甚了解的问题，就直言“我不甚了解”或讲“我不懂”，不时加以询问，思维敏捷。在研讨会或者总结会后，吴先生经常满怀热情发表他的看法，其深邃和远见，令我们难以忘怀。其中，让我们印象非常深刻的是：吴文俊特别重视数学机械化方法的应用，明确提出“数学机械化方法的成功应用，是数学机械化研究的生命线”。他亲力亲为，不断开拓新的应用领域，如控制论、曲面拼接、机构设计、化学平衡、平面天体运行的中心构形、全局优化新方法等等。以他的学生高小山为首的优秀的数学机械化研究团队，在上述领域以及若干高科技领域，包括机器人结构的位置分析、智能计算

机辅助设计 (CAD)、信息传输中的图像压缩等数学机械化应用的研究已经得到一系列国际领先的成果。

吴先生八十那年，时值我国南斯拉夫大使馆被美国轰炸。在他的生日晚会上，吴先生致辞时，开始强烈谴责美国的轰炸，一字未提自己的生日、自己的成就和生日的晚宴，然后长时间地和非常激动地讲到，从事机械化研究和应用与提高国力的关系，他强烈的爱国心，感动了我们，也感动了在场的宾客。吴先生长期以来，为弘扬中国文化、发扬中国传统数学不懈努力，力求通过自己的科研工作来复兴中国文化、科学和技术，这种爱国主义精神是我们的榜样，也是所有中国知识分子的榜样。

(王世坤为中科院数学与系统科学研究院研究员，  
吴可、费少明均为首都师范大学数学科学学院教授)