吴 文 俊

胡 作 玄
(中国科学院系统科学研究所)

吴文俊 1919 年 5 月 12 日于上海。拓扑学、几何学、数学史、数学机械化。

吴文俊出生在一个知识分子家庭。父亲吴福同毕业于上海交通大学前身的南洋公学，长期在一家以出版医药卫生书籍为主的书店任编译，埋头工作，与世无争。家中收藏的许多“五四”运动时期的书籍与历史书籍对少年吴文俊的思想有重要影响。吴文俊在初中时对数学并无偏爱，成绩也不突出，只是到了高中，由于授课教师的启迪，逐渐对数学及物理，特别是几何与力学产生兴趣。1936 年中学毕业后，并没有专攻数学的想法，而且家庭对供他上大学也有一定困难，只是因为当时学校设立三名奖学金，一名指定给吴文俊，并指定报考上海交通大学数学系，才使他考入这所以工科见长的著名学府。比起国内当时一些著名大学来，上海交通大学数学系成立较晚，数学内容也比较国老，数学偏重计算而少理论，这使吴文俊念到二年级时，对数学失去了兴趣，甚至想辍学不念了。到三年级时，由于武崇林讲授代数与实变函数论，才使吴文俊对数学的兴趣发生了新的转机。他对于现代数学尤其是实变函数论产生了浓厚的兴趣，在课下刻苦自学，反复阅读几种著作，在数学上打下了坚实的基础。有了集合论及实变函数论的深厚基础后，吴文俊进而钻研点集拓扑的经典著作（如 F·豪斯多夫 （Hausdorff）， W.H. 杨（Young）等人的名著）以及波兰著名期刊《数学基础》（Fundamenta Mathematica）上的论文。前几卷几乎每篇都读，以后重点选读，现在他还保存着当时看过的论文摘要。然后又进而学习组合拓扑学经典著作。他的高超的外文水平（特别是英文、德文）大大有助于他领会原著。只是毕业之后无法接触现代数学书刊，加上日常工作繁重，只得中断向现代数学的进军，而抽空以初等几何自娱，实属迫不得已。实际上，他的现代数学基础主要还是靠大学三、四年级自学而成。

1940 年吴文俊从上海交通大学毕业，时值抗日战争，因家庭经济问题而经朋友介绍，到租界里一所育英中学工作，不但教书同时还要兼任教务员，搞许多繁琐的日常事务性工作。1941 年 12 月珍珠港事件后，日军进驻各租界，他失业半年，而后又到上海培真中学工作。在极其艰苦的条件下，勉强度过日伪的黑暗统治时期。他工作认真，在 5 年半期间里竟找不到多少时间钻研数学，对他的成长不能不说是一大损失。

抗日战争胜利后，他到上海临时大学任教。1946 年 4 月，陈省身从美国返回国内，在上海筹组中央研究院数学研究所。吴文俊经亲友介绍前去拜访，亲戚鼓励他说，陈省身先生是学者，只考虑学术，不考虑其他，不妨放胆直言。在一次谈话中，吴文俊直率提出希望去数学所，陈省身当时未置可否，但临别时却说：“你的事我放在心上。”不久陈省身即通知吴文俊到数学所工作。从 1946 年 8 月起，吴文俊在数学所（上海岳阳路）工作一年多。这一年陈省身着重于“训练新人”，一周讲 12 小时的课，授拓扑学。听讲的年轻人除吴文俊外，还有陈国才、张素诚、周毓麟等等。陈省身还经常到各房间同年轻人交谈，对他们产生了巨大的影响。

与陈省身的结识是吴文俊一生的转折点，他开始接触到当时方兴未艾的拓扑学，这使他大开眼界，使自己的研究方向也从过去偏狭的古老学科转向当代新兴学科的康庄大道。在陈省身的带动下，吴文俊很快地吸收了新理论，不久就进行独立研究。当时 H. 惠特尼（Whitney）提出的示性类，有一个著名的对偶定理，惠特尼对这个定理给的证明极为复杂，难以弄清，并且从来没有发表过。吴文俊独创新意，给出一个简单的证明。这是示性类的一个重要成果，

现在已成为经典。陈省身对此十分欣赏，把它推荐到普林斯顿大学出版的《数学年刊》（*Annals of Mathematics*）上发表。在数学荒疏多年的情况下，一年多时间之内，就在以难懂著称的拓扑学的前沿取得如此巨大成就，不能不说是由于吴文俊的天才和功力。

1947 年 11 月，吴文俊考取中法交换生赴法留学。当时正是布尔巴基（Bourbaki）学派的鼎盛时期，也是法国拓扑学正在重新兴起的时代。吴文俊在这种优越的环境中迅速成长。他先进斯特拉斯堡大学，跟着 C. 埃瑞斯曼（Ehresmann）学习。埃瑞斯曼是 E. 嘉当（Cartan）的学生，他的博士论文是关于格拉斯曼流形的同调群的计算，这个工作对后来吴文俊关于示性类的研究至关重要，同时，他还是纤维丛概念的创始人之一。他的一些思想对吴文俊后来的工作是有一定影响的。在法国期间，吴文俊继续进．行纤维空间及示性类的研究，在埃瑞斯曼的指导下，他完成了“论球丛结构的示性类”（Sur les Classes caractenstlques des structures fibrees spheriques）的学位论文．这篇论文同 G • 瑞布（Reeb）的论文一起，于 1952 年以单行本出版。吴文俊于 1949 年获得法国国家博士学位。此后他还发表了多篇关于概复结构及切触结构的论文。在斯特拉斯堡他结识了 R．托姆(Thom)等人。吴文俊的一些结果发表后，引起各方面的广泛注意，由于他的某些结果与以前结果表面不同而使 H. 霍普夫(Hopf)亲自来斯特拉斯堡澄清他们的工作。霍普夫同吴文俊交谈后才搞清楚问题，非常赞赏吴文俊的工作，并邀请他去苏黎世讲学一周。在苏黎世他结识了当时在苏黎世访问的江泽涵。他的工作还受到了 J.H.C. 怀特海（Whitehead）的注意。取得学位后，吴文俊到巴黎，在法国国家科学研究中心（CNRS）研究数学，在 H. 嘉当（Cartan）（他是 E.嘉当的儿子）的指导下工作。这时，H. 嘉当举办著名的嘉当讨论班，这个讨论班对予拓扑学的发展有重要意义。同时，反映国际数学主要动向的布尔巴基讨论班也刚刚开始，当时参加的人数还不多，一般二三十人。吴文俊参加这两个讨论班，并在讨论班上作过报告。当时嘉当致力于研究著名的斯廷罗德上同调运算。吴文俊从低维情形出发，已猜想到后来所谓嘉当公式。H. 嘉当在他的全集中，也归功于吴文俊。同时吴文俊发表的论文也预示了后来的道尔德流形。

1951 年 8 月，吴文俊谢绝了法国师友的挽留，回到解放了的祖国。他先在北京大学数学系任教授，在江泽涵的建议之下，吴文俊获准于 1952 年 10 月到新成立的中国科学院数学研究所任研究员。当时数学所在清华大学校园内，他和张素诚、孙以丰共同建立拓扑组，形成中国的拓扑学研究工作的一个中心。不久他结识陈丕和，并于 1953 年结婚，婚后生有三女一子，皆学有所成。从 1953 年到 1957 年短短 5 年间，吴文俊以忘我的劳动做了大量工作。在这段日子里，他主要从事几 Л.С. 庞特里亚金（ЛОНТРЯГИН）示性类的研究工作，力图得出类似于施蒂费尔-惠特尼示性类的结果。但是庞特里亚金示性类要复杂得多，许多问题至今未能解决，他在 5 篇论庞特里亚金示性类的论文中的许多结果长期以来是最佳的。1956 年他作为中国代表团的一员赴苏联参加全苏第三次数学家大会，作关于庞特里亚金示性类的报告，得到好评。庞特里亚金还邀请他到家中作客并进行讨论。

其后，吴文俊的工作重点从示性类的研究转向示嵌类的研究，他用统一的方法，系统地改进以往用不同的方法所得到的零散的结果。由于他在拓扑学示性类及示嵌类方面的出色工作，他与华罗庚、钱学森一起荣获 1956 年国家第一届自然科学奖的最高奖——一等奖，并于 1957 年增选为中国科学院学部委员。1957 年他应邀去波兰、民主德国并再次去法国访问，在巴黎大学系统介绍示嵌攀理论达两个月之久，听众中有 C．海富里热（Haefliger）等人，对于海富里热等人后来的嵌入方面的工作有着明显的影响。1958 年吴文俊被邀请到国际数学家大会作分组报告（因故未能成行）。

从 1955 年起数学所拓扑组开始有新大学生来工作，在吴文俊的指导下，开始走向研究的道路。其中有李培信、岳景中、江嘉禾、熊金城及虞言林等。

从 1958 起，由于国内政治形势的影响，稳稳当当的理论研究究工作难以继续进行，拓扑学研究工作也被迫中断。在“理论联系实际”的口号下，数学所的研究工作进行大幅度调

整。吴文俊同一些年轻人开始对新领域——对策论进行探索。在短短的一两年中不仅引进了这门新学科，而且以其深厚的功力，作出值得称道的成果。从 1960 年起，他担任中国科学技术大学数学系 60 级学生的主讲教师，开出三门课程：微积分、微分几何和代数几何，共七个学期，他高超的教学水平使这届学生受益匪浅。

三年困难时期科学研究工作部分得到恢复。1961 年，在颐和园龙王庙召开会议，讨论数学理论学科的研究工作的恢复问题。从 1962 年起，吴文俊重新开始拓扑学的研究工作，特别着重于奇点理论。其后又结合教学对代数几何学进行研究，定义了具有奇点的。代数簇的陈省身示性类，这大大领先于西方国家。1964 年起社会主义教育运动（“四清”）再一次使他的研究工作中断。1965 年 9 月，吴文俊以普通工作队员的身分到安徽省六安县参加半年“四清”运动。回京后不久，“文化大革命”开始了，数学所大部分研究工作从此长期陷于停顿，吴文俊也不得不参加运动并接受“批判”。他的住房也大大压缩了，六口之家挤在两小间屋子里，工作条件可想而知。但就在这种困难的条件下，他仍然抓紧时闯从事科研工作，只是方向有所变化。他在 1 966-1967 年注意到他的示嵌类的研究可用于印刷电路的布线问题，并于 1973 年完全解决。他的方法完全是可以算法化的，而这种“可计算性"是与以前在布尔巴基影响下的纯理论的方向完全不同的。大约从这时开始，他完成自己数学思想上一次根本性的改变。大约同时，他还参加仿生学的研究。1971 年他到北京无线电一厂参加劳动。1972 年科研工作开始部分恢复，同时中美数学家开始交流，特别是陈省身等华裔数学家回国，带来国际上的许多新情况。1973 年数学所拓扑组开始讨论由 D．沙利文（Sullivan）等人开创的有理同伦论，据此吴文俊提出他的 I^* 函子理论，其显著特点之一也是“可计算性”。1974 年，吴文俊的兴趣转向中国数学史，用算法及可计算性的观点来分析中国古代数学，发现中国古代数学传统与由古希腊延续下来的近现代西方数学传统的重要区别，对中国古算作了正本清源的分析，在许多方面产生独到的见解。这两方面是他在 1975 年到法国高等科学研究院访问时主要的报告题目。

1976 年粉碎“四人帮”之后，科学研究开始走上正轨。年近花甲的吴文俊更加焕发出青春活力。他在中国古算研究的基础上，分析了西方 R．笛卡儿（Descartes）的思想，深入探讨 D．希尔伯特（Hilbert）《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*)一书中隐藏的构造性思想，开拓机械化数学的崭新领域。1977 年他在平面几何定理的机械化证明方面首先取得成功，1978 年推广到对微分几何的定理机械化证明，这样走出完全是中国人自己开拓的新数学道路，并产生巨大的国际影响。到 80 年代，他不仅建立数学机械化证踢的基础，而且扩张成产泛的数学机械化纲领，解决一系列理论及实际问题。

1979 年以后，我国数学家的国际交往日益频繁，吴文俊也多次出国。从 1979 年被邀请去普林斯顿高级研究院任研究员起，其后几乎每年都出国访问或参加国际学术会议，对于在国外传播其数学成就起着重要作用。尤其是吴文俊机械化数学的思想与中国传统数学受到国际上的瞩目。1986 年他在国际数学家大会上作关于中国数学史的报告，引起广泛的兴趣，这样，在近代数学史上第一次由中国数学家开创数学新领域，不再是沿袭他国的主题、他国的问题和他国的方法，吸引了众多的数学家向中国学习。1980 年在陈省身的倡议下，吴文俊积极参与双微会议(微分几何与微分方程国际讨论会)的筹备及组织工作。从1980年到1985年共举行六届双微会议，对于国内外数学界的交流起了重要推动作用。

1979 年夏，吴文俊、关肇直、许国志等人筹建中国科学院系统科学研究所，1980 年该所正式成立。吴文俊任副所长兼基础数学室室主任、学术委员会主任，1983 年后任名誉所长。1990 年 8 月 8 日，以吴文俊为首的“数学机械化中心”正式成立。

吴文俊的数学研究跨度很大，这里基本上按时间顺序来分述其主要工作：

代数拓扑学与微分拓扑学

（1）纤维丛及示性类

纤维丛概念是现代数学中最基本的概念之一，对数学各个领域及至数学物理(如杨-米尔斯规范场论)有着广泛的应用。纤维丛的概念隐含在 E．嘉当的著作之中，经埃瑞斯曼及 N.E．斯廷罗德（Steenrod）等人提炼而成。从 30 年代起 E．施蒂费 (Stiefel)、惠特尼、庞特里亚金和陈省身分别得出以他们的姓氏命名的不性类，对于纤维丛的研究起了决定性的推动作用。但是到 40 年代中其基本性质并不清楚。吴文俊最早的工作之一就是对惠特尼的丛乘积公式给出一个圆满的证明。到法国之后，在他的博士论文中，他定出各种示性类之间的种种关系，例如，具有概复结构的丛的庞特里亚金示性类 P^{4k} 与陈省身示性类 C^{2i} 之间有如下的关系：

$$(-1)^k P^{4k} = \sum_i (-1)^i C^{2i} \cup C^{4k-2i}$$

他还得出 4 维可定向微分流形上具有概复结构的充要条件。这些工作主要是基于对格拉斯曼流形的胞腔结构，因为各种示性类均为相应格拉斯曼流形中上同调类的原象。为了更深入地研究格拉斯曼流形的同调性质，吴文俊运用了当时发现还不久的更强的拓扑工具——上同调运算，特别是斯廷罗德平方 Sq 。由此得出

$$Sq^r W_2^s = \sum_{t=0}^{r} \binom{s-r+t-1}{t} W_2^{r-t} W_2^{s+t}$$

这漂亮公式，其中 $\binom{p}{q}$ 为（模 2）二项系数。他指出：球丛的施蒂费尔-惠特尼示性类只由维数为 2^k 的类完全决定。上述公式还被应用于解决另外一大问题：微分流形的示性类的拓扑不变性，即与微分结构无关。微分流形的施蒂费尔-惠特尼示性类拓扑不变性虽在 1950 年已由托姆证明，而吴文俊几乎同时通过同调性质把示性类明显表出，这就是著名的吴(文俊)公式：

设 M 是紧 n 维微分流形，则全施蒂费尔-惠特尼示性类 $W = SqV$ ，其中

$$V = 1 + V_1 + \cdots + V_n$$

由等式

$$V = SqX, X \in H^*(M)$$

唯一决定。由这一公式可以使施蒂费尔-惠特尼示性类的计算成为例行公式，从而引致一系列应用，例如非定向流形的配边理论的标准流形（实射影空间及吴一道尔德流形）的完全决定。这最终使施蒂费尔-惠特尼示性类理论成为拓扑学中最完美的一章。

吴文俊的下一目标是庞特里亚金示性类，而庞特里亚金示性类的问题要难得多。吴文俊研究时，只有庞特里亚金的一个简报（1942）及一篇论文（1947）。庞特里亚金用的是同调，吴文俊在博士论文中，首先把它改造成上同调，并对其胞腔分解等作了一系列简化。其后运用类似庞特里亚金平方等上同调运算，先后证明模 3 及模 4 庞特里亚金示性类的拓扑不变性类，并得出明显表示。其后引入另一类 Q_p^i ，证明其拓扑不变性，由此推出某些庞特里亚金类的组合（模 p ）的拓扑不变性。值得一提的是庞特里亚金示性类的命名也是吴文俊首先提出的。

（2）实现或嵌入问题——示嵌类

几何学与拓扑学中最基本问题之一是实现嵌入问题。初等几何学中的对象如曲线、曲面均置于欧氏空间中，往往通过坐标及方程来刻划。而拓扑学中的基本概念如流形或复形，都是抽象地或内蕴地定义的。是否可把它们放在欧氏空间中使我们产生具体的形象(成为手流形或子复形)，这就是实现或嵌入问题。在吴文俊的工作之前，已有 E. R. 范•卡本（Van Kampen）及惠特尼等人的部分结果。而吴文俊把以前表面上不相关连、方法上各异的成果统一成一个系统的理论。他主要的工具是考虑_二空间的 p 重约化积，利用 P. A. 史密斯(Smith)的周期变换理论定义上同调类。他的嵌入理论的基本定理是：

定理　若 X 能实现于 R^N 中，则 $\Phi_p^i(X)=0, i \ge N(p-1)$ 这定理包含以前所有结果为特例，而且不论是拓扑嵌入、半线性嵌入，还是微分嵌入均成立。由此可以推出一系列具体结果，某些结果也为 A. 夏皮罗(Shapiro)独立得到。吴文俊于 1957 年又把结果扩充到处理同痕问题，特别是证明：只须 $n>1$，所有行维微分流形在 R^{2n+1} 中的微分嵌入均同痕，从而可知高维扭结不存在。这显示 $n=1$ 与 $n>1$ 有根本不同。这里值得一提的是：n 重约化积的想法早在 1953 年构造非同伦型的拓扑不变量时就已得出，而且曾用于证明例如模 3 庞特里亚金示性类拓扑不变性从此成为研究拓扑问题的有力工具。

1966 年吴文俊为他的嵌入理论找到实际应用，集成电路布线同题实际上就是一个线性图的平面嵌入问题。吴文俊运用示嵌类理论把问题归结为简单的模 2 方程的计算问题。他不仅可得出是否可嵌入的判据，而且可以指出如何具体地布线。他的方法完全可以计算，可以上计算机，效率远远超过类算法。

(3) I^* 函子

吴文俊基于沙利文的工作，在 1975 年首先提出一种新函子 I^* 函子，它比已知的经典函子如同调函子 H，同伦函子 π，广义上同调 K 函子等更易于计算及使用。对于满足一定条件的有限型单纯复形，可以定义一个反对称微分分次代数（简记为 DGA），对每 DGAA，可唯一确定一个极小模型 $\operatorname{Min} A$ 即 I^*，吴文俊使这定义范畴化，并指出它们的可计算性。I^* 函子不仅可以得出 H^* 及 π 的有理部分信息，而且可以得出一些复杂的关系。对于由 X，Y 生成的空间如 $X \vee Y, X/Y, X, Y$ 构成的纤维方等等，用 $H^*(X), H^*(Y)$ 得不出 $H^*(X \vee Y)$ 的完全信息，用 π 也是如此，但对 I^* 函子这些公式均可通过明显公式得出。吴文俊通过大量计算处理纤维方、齐性空间等典型，将这些关系写出，并特别强调其可计算性。在 1981 年上海双微会议上，他还对于著名的德拉姆定理作了构造的解释。吴文俊德工作总结在[5]中。这些 I^* 成为构造性代数拓扑学的关键部分。

复几何学与代数几何学

吴文俊在早期研究纤维丛的工作中已自然地涉及 G-结构，如概复结构与切触结构的存在条件。他真正对代数几何学进行深入研究则是从 60 年代开始的。其中特别是他独立于西方代数几何学主流进行研究，率先取得一些出色的结果。1965 年，他首先对于具有奇点的代数簇定义陈省身示性类。他定义的方法基于格拉斯曼流形，这与后来 R. D. 麦克弗森（MacPherson）在 1977 年的定义完全不同。利用这个定义，对于 1977 年由丘成桐及宫闵喜一独立证明的光滑代数曲面的陈数公式 $c_1^2-3c_2\le 0$ 作了大　规模的推广，不仅推广到具有任意奇性的代数曲面，而且推广到高维代数簇，例如得出复射影空间 CP^4 的超曲面的陈数不等式。

对策论

继 20 世纪初 E. 策梅洛（Zerme1o）、E. 波莱尔（Borel）及 J. 冯•诺伊曼（Von Neumann）

的初步研究之后，1944 年冯·诺伊曼及 O．摩根斯顿（Morgenstern）的《对策论与经济行为》（*Theory of games and economic behavior*）的问世标志着对策论作为独立学科的诞生。其后的重要发展是 1950 年 J．纳什（Nash）关于非零和对策中非合作对策的研究。他引进平衡局势的概念并证明正规型 n 人有限对策平衡局势的存在性。吴文俊对活动区域受限制的情况下，利用角谷不定点定理韵推广，推广了纳什定理。在一般情况下平衡点未必存在，吴文俊等还引进“本性平衡点"的概念，它具有更好的性质，即没有本性平衡点的对策是多少例外的情形。

中国数学史

(1)《海岛算经》中证明的复原

刘徽于公元 263 年作《九章算术注》，把原见于《周髀算经》中的测日高的方法扩张为一般的测望之学——重差术，附于勾投章之后。唐代把重差这部分与九章分离，改称《海岛算经)。原作有注有图，后失传。理存《海岛算经》只剩九题。第一题为望海岛，大意为从相距一定距离两座已知高度的表望远处海岛的高峰，从两表各向后退到一定距离即可看到岛蜂，求岛高及与表的距离。对此刘徽得出两个基本公式

$$\text{岛高} = \frac{\text{表高} \times \text{表间}}{\text{相多}} + \text{表高},$$

$$\text{岛与前表距离} = \frac{\text{前表退行距} \times \text{表间}}{\text{相多}}$$

其中相多表示从两表后退距离之差。

吴文俊研究后人的各种补证之后，发现除了杨辉的论证及李俨对杨辉论证解释之外，并不符合中国古代几何学的原意，尤其是西算传入以后，用西方数学中添加平行线或代数方法甚至三角函数来证明是完全错误的。针对这些证明，他明确提出数学史研究两条基本原理：

1)所有结论应该从侥幸留传至今的原始文献得出来。

2)所有结论应该按照古人当时的思路去推理，也就是只能用当时已知的知识和利用当时用到的辅助工具，而应该严格避开古代文献中完全没有的东西。

根据这两条忠于历史事实的原则，吴文俊对于《海岛算经》中的公式的证明作了合理的复原。吴文俊认为，重差理论实来源于《周髀算经》，其证明基于相似勾股形的命题或与之笲价的出入相补原理。从而指出中国有自己独立的度量几何学的理论，完全借助西方欧几里得体系是很难解释通的。

(2)出入相补原理的提出

吴文俊在研究包括《海岛算经》在内的刘徽著作的基础上，把刘徽常用的方法概括为“出入相补原理”。他指出这是“我国古代几何学中面积体积理论的结晶”。出入相补原理的表述十分简单：一个图形不论是平面还是立体的，都可以切割成有限多块，这有限多块经过移动再组合成另一图形，则后一图形的面积或体积保持不变。这个常识性的原理在中国古算中经过巧妙地运用得出许多意想不到的结果。例如，用于证明勾股定理以及勾段弦及其和差互求，特别是吴文俊指出由不等边三角形边长求面积的秦九韶公式

$$\text{面积}^2 = \frac{1}{4}[\text{小}^2 \bullet \text{大}^2 - (\frac{\text{大}^2 + \text{小}^2 - \text{中}^2}{2})^2]$$

可由出入相补原理得出。吴文俊还指出由秦九韶公式可化简成海伦公式，反之则不可思议，说明秦九韶公式至少独立于海伦公式得来，而且证明远为简单. 中国开方的方法的几何根据也是出入相补原理，并由此可解二次方程。

吴文俊进一步指明中国数学的体积求法，除了依据出入相补原理之外，另外还要提出刘徽原理：斜解一长方体，所得阳马和鳖臑的体积比例恒为 2：1。由这两个基本原理出发，

所有平直多面体的体积公式均可求得，例如羡除公式等。这些远远超前于西方数学。对于球体的体积公式，则需把刘徽原理推广为祖暅原理，但初步工作已为刘徽完成。

(3)指明秦九韶工作的算法特性

《九章算术》后中国古算的一大高峰是秦九韶的《数书九章》，秦九韶书之大衍求一术与增乘开方术是中国数学的重要创造。其特点是其构造性及可机械化. 吴文俊用小计算器即可按照秦九韶方法求高次代数方程数值解，直截了当，而且大衍求一术的算法十分有效，远超过西法，模数也不限于素数，而且不必互素。

(4)发展朱世杰的算法

吴文俊解释并发展朱世杰在《四元玉签》中的解高次联立代数方程组的有效算法，成为机械化证明的代数基础。

数学机械化纲领

吴文俊近十多年的成就往往因早期工作被狭窄地认为只是定理机器证明，而实际上这只不过是一个使数学机械化的宏伟纲领的开端。

数学机械化的思想来源于中国古算，并从笛卡儿的著作中找到根据，提出一个把任意问题的解决归结为解方程的方案。

任意问题 $\xrightarrow{(1)}$ 数学问题

$\xrightarrow{(2)}$ 代数问题

$\xrightarrow{(3)}$ 解方程组 $\begin{cases} P_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ P_n(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{(4)}$ 解方程 $P(x)=0$

这里 P_i 及 P 均为多项式。现在知道，这里每一步未必行得通，即使行得通是否现实可行也是问题。吴文俊的贡献在于：

1)提出一套完整的算法，使得代数方程组越过机械步骤消元变成一个代数方程。

2)解代数方程组可扩大为带微分的代数方程组，从而大大扩张研究问题的范围。

3)不仅能证明定理，而且能自动发现定理，这大大优越于现有的任何方法。

4)与许多以前的原则可行的方法相比较，吴文俊的方法完全是现实可行的。

5)算法稳定，能一举同时得出多解，这是其他算法根本无法比拟的。

下面分述一下细节。

（1）几何定理的机器证明。

1976 年冬开始研究，1977 年春取得初步结果，证明初等几何主要二类定理的证明可以机械化，问题分成三个步骤：

“第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统及坐标系统，使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题。

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推出。

第三步，依据第二步中的确定步骤编成程序，并在计算机上实施，以得出定理是否成立的最后结论。”

1977 年吴文俊在一台档次很低的计算机（长城 203 型台式计算机）上首先按上述步骤

实现像西姆森（Simson）线那样不很简单的定理的证明，并把机器定理证明的范围推广到非欧几何、仿射几何、圆几何、线几何、球几何等等领域，先后与其同伴们陆续证明 100 多条定理.周咸青应用吴氏算法证明 600 多条定理。1978 年初吴文俊又证明初等微分几何中的一些主要定理也可以机械化。

其后吴文俊把他的机械化定理证明方法概括为两个基本定理：

1)J.S.里特（Ritt）原理。任给一多项式组 PS 可机械地得出一三角型多项式组 TPS （不唯一，称为 PS 的特征组），使

① $Zero(TPS/J) \subset Zero(PS) \subset Zero(TPS)$，

② $Zero(TPS) = Zero(TPS/J) + \sum Zero(Zeron(PS_i))$

其中 $Zero$ 表示括号中多项式组的零点集，J 及 PS 等可通过一定机械步骤得出。

2)零点分解定理.任给一 PS 及另一多项式 H，可机械得出一个分解（不唯一）。

3) $Zero(PS/H) = \sum Zero(IRR_i/R_i)$

由于这两个定理可以推广到微分多项式组。从而用它们也可实现初等微分几何定理的机械化证明.不仅如此，它还可以用来自动发现定理以及鉴别各种退化情形，而这些退化情形在一般定理证明中往往是不予深究而使定理的证明并不完整。

(2)方程求解与数学机械化

定理机器证明只不过是数学机械化牛刀小试而已。在几何定理机械证明取得重大成功之后，吴文俊把研究重点转移到数学机械化的核心问题——方程求解上来。他把里特原理及零点分解定理加以精密化，得出作为机械化数学基础的整序原理及零点结构定理：

1)整序定理。存在一个算法，使对任一多项式组 PS 可确定一升列 CS(称为 PS 的特征列)，使

$$Zero(PS) = Zero(CS/J) + \sum Zero(Zero(PS_i)) \qquad (1)$$

其中 $QS_i = PS + I_i, I_i$ 是 CS 的初式，J 是诸 I_i 的乘积，算法可由简单的确定程序给出。

2)零点结构定理。存在一算法，使对任一多项式组 PS，可确定一组升列 AS 成一组不可约升列 IRR_j，使

$$Zero(PS) = \sum Zero(AS_i/J_i)\text{，} \qquad \text{(II)}$$

$$Zero(PS) = Var(IRR_j)\text{，} \qquad \text{(III)}$$

(I)—(III)给出 $Zero(PS)$ 的结构及求法，其中(III)是最完备的．由此得出任一方程组的有效解法。它不仅可用于代数方程组，还可以解代数偏微分方程组，从而大大扩大理论及应用的范围。一个突出的应用是由 J．开普勒（Kepler）三定律自动推导牛顿万有引力定律，这在任何意义下来讲都应该说是一件最了不起的事。在这种考述之下：自然可以料想各种应用纷纷至沓来。

A．建立一系列新算法，并用来解决各种实际问题。特别是吴文俊能处理极难的非线性规划问题，从而有效解决化学平衡问题，这一问题在化学及化工中都是最基本的。

B.建立二一系列未知关系，例如双曲几何巾边长与面积等关系的自动准导，有些即使在通常情况下也是很难得出的。

C．证明不等式及各种定理 •

D. 解决一系列实际问题，如机器人逆运动方程求解问题，连杆运动方程求解问题等等。

在吴文俊的总纲领之下，他的同事及学生吴文达、石赫、刘卓军、王东明、胡森、高小山、李子明、王定康等等得出一系列理论及实际应用的结果。可以期望未来还会有更大和更多的应用。

从理论上讲，他用零点集的表述方式代替理想论的表述方式，这对代数几何学是一个新的冲击。

其他

除了上述几大方面，吴文俊还在奇点理论、莫尔斯（Morse）理论、积分不变量理论（李华宗定理）等诸多领域有着不少贡献。

吴文俊的各项独创性研究工作使他在国际、国内产生广泛的影响，享有很高的声誉。陈省身称吴文俊“是一位杰出的数学家，他的工作表现出丰富的想象力及独创性。他从事数学教研工作，数十年如一日，贡献卓著……”。这可以说是对吴文俊工作的确切评价。吴文俊的拓扑学的各项研究早已成为经典，吴公式、吴类已成为许多论文的题目！而且是许多优秀结果的出发点。近年来对于中国数学史的研究及从定理机器证明的数学机械化纲领正在急剧地扩大影响，真正成为一个独具中国特色的结构性的可机械化的数学运动。单是定理机器证明就已获得许多热情的赞扬。J.S.穆尔（Moore）认为，在吴文俊的工作之前，机械化的集合定理证明处于黑暗时期，而吴文俊的工作给整个领域带来光明，美国定理自动证明的权威人士 L.渥斯（Wos）认为吴文俊的证明路线是处理集合问题的最强有力的方法，吴文俊的贡献将永载史册。而这些只不过是吴文俊机械化数学方案的开头部分。

吴文俊取得这些成就完全是靠他一生积极进取、锲而不舍的治学精神。他读庞特里亚金的俄文原文完全是靠字典一个字一个字查出来的，使用计算机完全靠自己长时间一点一点摸索出来，其刻苦精神由此可见一斑，他热爱数学、独立思考、富于创见，无论外界环境顺利还是困难，都能始终如一地努力从事研究工作。吴文俊一生淡泊自守，对于名利看得很轻，从来不宣扬自己，以至于他在国内的知名度与他的成就极不相称。他不仅从未沾染学术界的不良作风，恰恰相反，他平易近人，乐于助人，乐于宣传其他人的成绩，学术作风民主。

吴文俊在科研之处，对教学和数学的传播也做出不少贡献。他在中国科学院数学所、系统所培养了不少年轻人，在中国科学技术大学培养了 60-65 届 80 多名学生，其中有李邦河、王启明、彭家贵、徐森林等许多人皆学有所成。吴文俊教学生动，内容充实，讲课一气呵成，是听者一步步跟随他渐入佳境。他虽然不再教学第一线工作，但他的教学艺术可说是炉火纯青，与那种一上来就是定义、定理、证明的“机械化教学”和数学神秘主义真不可同日而语。他的报告也是活泼生动，深入浅出，听起来流畅自然，听后再整理就会发现内容极为丰富及充实，需要花好大气力来消化。他还写了不少传播性的数学著作，也是文如其人，朴素自然，言简意赅、内容充实。他的这部分作品主要收集在[20]中，是对中国数学能够健康发展的一大贡献。

吴文俊具有强烈的爱国心，他在大学时就对国民党腐败统治十分厌恶。他自己考取公费赴法留学，很快就不再接受政府公费。在法留学期间，他一直关心祖国的命运和前途，关心解放战争的进展，关心新中国的建设。于 1951 年放弃在法国的优越条件，毅然回到祖国参加社会主义建设。他对祖国的经济建设十分关心，对于国内重大建设项目，他都如数家珍。70 年代以后，他对中国文化有了更深刻的认识，通过自己的科研工作真正切实地作到复兴中国文化的优秀内核，而不是家爱国主义之名恢复封建糟粕之实。吴文俊真正找到了发扬爱国主义精神、弘扬中国传统文化的正确道路。